昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2014年3月1日発行　第52巻3号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

3
2014

特集 幾何学における様々な発想
いかにして空間をとらえるか

幾何学の発想 その変遷　小島　定吉
トポロジーの考え方 コーヒーカップとドーナツの同一視とは　村上　順
ものの曲がり具合とは何だろうか 曲率　戸田　正人
代数幾何に至る発想　小林　正典
特異点　石井志保子
非可換幾何学の考え方　佐古　彰史
多様体の解析 リッチ・フローと幾何化予想の解決　塩谷　隆
幾何学と可視化　逆井　卓也
[コラム] アインシュタインが取り入れたリーマン幾何学の発想　安井　幸則
[コラム] 幾何学的結び目理論へのいざない　今井　淳
《連載》科学と社会 その19　岡本　拓司
大学院入試問題からみた大学の数学 その12　海老原　円　太田　雅人
例題形式で探求する微積分学の基本定理 その8　森田　茂之



No.609

サイエンス社

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ-103：for Senior & Graduate Courses）

量子情報と時空の物理

量子情報物理学入門

堀田　昌寛　著

本書は，基礎物理学の諸分野において，近年そのニーズに高まりを見せている量子情報物理学の入門的実用書である．多くの具体例をはさみながら，前半では量子情報理論の入門的解説を行い，後半ではブラックホールや量子多体系への応用を，量子情報の時空的観点から論じている．また，量子エネルギーテレポーテーションに関する新しい知見も紹介している．

第１章　コペンハーゲン解釈の情報理論的側面
第２章　量子測定
第３章　量子操作
第４章　量子エンタングルメント
第５章　連続測定と量子ゼノン効果
第６章　ウンルー効果と量子情報
第７章　ホーキング輻射と量子情報
第８章　量子エンタングルメントと負エネルギー
第９章　量子エネルギーテレポーテーション
付録A　連続系の状態トモグラフィ
付録B　シュミット分解
付録C　フォンノイマンエントロピーの凹性の証明
付録D　トレースノルムが行列凸関数である証明
付録E　ガウス状態のネガティビティの公式の導出

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 609 March 2014

幾何学における様々な発想

いかにして空間をとらえるか

《特　集》
幾何学の発想 その変遷　5　小島　定吉
トポロジーの考え方 コーヒーカップとドーナツの同一視とは　7　村上　順
ものの曲がり具合とは何だろうか 曲率　13　戸田　正人
代数幾何に至る発想　20　小林　正典
特異点　26　石井志保子
非可換幾何学の考え方　34　佐古　彰史
多様体の解析 リッチ・フローと幾何化予想の解決　40　塩谷　隆
幾何学と可視化　46　逆井　卓也
[コラム] アインシュタインが取り入れたリーマン幾何学の発想　32　安井　幸則
[コラム] 幾何学的結び目理論へのいざない　52　今井　淳

名著に親しむ 特集から広がる読書案内
幾何学の名著 管状近傍をめぐって　54　橋本　義武

《書　評》
高瀬正仁著 岡潔とその時代 I 正法眼藏，II 龍神温泉の旅 評傳岡潔　虹の章　56　林　知宏
辻川信二著 現代宇宙論講義 基礎からの系統的な理解を目指して　58　早田　次郎

《「数理科学」は語る》
1984年3月号　59　新井　民夫

《連　載》
科学と社会⑲
第二次大戦下の物理学者 (2) 日本の動向　60　岡本　拓司
大学院入試問題からみた大学の数学⑫
ベクトル解析 空間の微積分　68　海老原　円／太田　雅人
例題形式で探求する微積分学の基本定理⑧
曲面積 (2)　76　森田　茂之

数理科学（２月号）前号案内／84
数理科学（４月号）次号予告／84
数理科学バックナンバー一覧／ 4

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000円，半年間（本誌のみ）5,500円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2010年/12 省略

2011年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学
/4 物理学と多様体
/5 初学者を悩ます数理の概念
/6 物理イメージと数式表現
/7 〈隠れた〉物理法則
/8 計算が拓く数学と物理の世界
/9 オイラー
/10 時空と熱力学
/11 線形から非線形へ
/12 物理と仮説

2012年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
/2 古典のススメ[物理編]
/3 量子を操る
/4 量子力学の数学的技法
/5 解析学と物理学
/6 面白い発想[物理編]
/7 数学と物理における格子
/8 導来圏をめぐって
/9 ハイゼンベルク
/10 超弦理論の数理
/11 物理と数学における厳密解
/12〈振動する〉物理

2013年/1 表現論の世界
/2 《量子化》の発想
/3 光と物理学
/4 解析学における様々な発想
/5 次元の作法
/6 発展する統計力学
/7 群と物理学
/8 エネルギーを通して物理学を知る
/9 ボーア
/10 分類する《数理科学》
/11 理論物理と実験物理の交錯
/12 物理学における存在とは

2014年/1 波と粒子
/2 利用する物理

数理科学臨時別冊一覧

12年/11 幾何学の量子化
12年/12 量子力学から超対称性へ
13年/1 行列解析ノート
13年/4 無限量子系の物理と数理
13年/7 現代宇宙論講義
13年/8 クォーク・ハドロン物理学入門
13年/9 統計力学から理解する 超伝導理論
13年/12 量子力学ノート
14年/1 量子情報と時空の物理
14年/2 弦理論と行列模型

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新　宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立　川）
くまざわ書店八王子店
くまざわ書店桜ヶ丘店（多　摩）
書泉グランデ（神　田）
三省堂本店（神　田）
リブロ池袋店
ジュンク堂池袋本店
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN＆ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
MARUZEN多摩センター店
ジュンク堂吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横　浜）
有隣堂イセザキ町本店（横　浜）
有隣堂西口・東口（横　浜）
有隣堂厚木店（厚　木）
ジュンク堂盛岡店
丸善津田沼店
ジュンク堂新潟店
ジュンク堂甲府岡島店

MARUZEN＆ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大　阪）
アバンティブックセンター（京　都）
ジュンク堂京都店
ジュンク堂三宮店
ジュンク堂三宮駅前店
ジュンク堂大分店
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂旭川店
金港堂（仙　台）
金港堂パーク店（仙　台）
ジュンク堂仙台本店
ジュンク堂秋田店
ジュンク堂郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北１店）
九州大学（理系）

March 2014 MATHEMATICAL SCIENCES Number 609

特集／幾何学における様々な発想

幾何学の発想

その変遷

小島 定吉

「発想」とは，要するに興味の対象（オブジェクト）をどう見るかという「思いつき」のことである．対象は一つであっても，その見方は多種多様にある．人によっては想像だにしなかった見方もあり得よう．日本語としては「思いつき」よりも「発想」のほうが重みがあるかもしれない．それはそれとして，幾何学の研究対象である図形の見方に大きな転換をもたらした過去の偉大な数学者の研究を振り返ると，発想の転換が常に期待される科学の現場では当り前といえば当り前だが，歴史の中に留めておくべき「発想」は時代とともに進化していることが見て取れる．

現代幾何学の原点は紀元前3世紀頃に編纂された「ユークリッド原論」であることは誰もが認める事実である．そこで展開された理論は，本特集の記事のいくつかにも言及があるとおり，精選された公理系から経験的に知り得た種々の事実が演繹されるという体系に核心がある．対象の抽象化と体系の構築という概型が基本にあり，その発想は今日では幾何学や数学に留まらず，科学のほとんどの分野の研究における方法論として活きている．数学の歴史という観点からも，理論体系を構築するという発想は「ユークリッド原論」に始まると考えるのは妥当である．

その後幾何学の歴史は，散発的なケースを除くと特筆すべき「発想」の提起がなくしばらく滞るが，17世紀のニュートンの登場により大きな転機を迎える．天体の動きという動的物理現象についてのニュートンの研究は，解析学の基盤である微積分学の創始につながるが，同時に，幾何学と関係の深い力学系分野にも継承されている．無理やり結びつけなくても，そもそも関数の微分を説明する際に図を用いない教師がいるはずもなく，ニュートンの業績が幾何学と無縁でないことは明らかである．しかし，ニュートンを幾何学者とよぶにはためらいを感じる．

現代幾何学の系譜を辿ると，おそらく18世紀のオイラーが創始者的カリスマであり，より具体的な成果の源泉はガウスといえよう．そこで19世紀前半から100年くらいを遡ってみると，ガウスが3次元ユークリッド空間に置かれた曲面の曲率などに注目したこと，リーマンが今日でいう多様体とリーマン幾何の基礎付けを提唱したこと，ポアンカレが多様体のトポロジーの研究を推奨したことなどの背景に，現代幾何学を支える大きな発想を読み取ることができる．しかし時代のずれがあることを考慮したとしても，三者に共通点があったと考えるのは無理がある．ではばらばらかというと，そんなことはない．実際，現代幾何学の多くの場面でガウス・リーマン・ポアンカレの発想は互いに融合し，その影響は多大なものがある．例えば，ガウスが定義した曲率を，リーマンのいう

多様体上で積分すると，ポアンカレが注目したオイラー標数が現れるというのが，ガウス・ボンネの定理である．

ところで，現代幾何学ではどのような研究が主導しているかを，その対象ではなく「発想」という観点から眺め直すと，少し見えてくるものがある．ガウスの時代の幾何学は，おそらく目に見えるものが直近の興味の対象で，その形状を表現する言葉が必要であった．人が目にして感じることを，数学の言葉，ひいては科学の言葉として表現するという作業は「言うが易し行うは難し」の典型例であり，ガウスのような天才にして初めてなせる技である．一方リーマンは，ガウスの発想を継承する幾何学の枠組みを，目に見えない高次元の空間に対しても構築することの必要性を力説した．これは単なる拡張に留まらないじつに大胆な発想で，幾何学者を次元の束縛から解放したと同時に，絵には書けない図形が研究対象としてクローズアップされた．さらにポアンカレは，局所的な形状ばかりに注目すると見過ごされてしまう図形の大域的な性質の研究の重要性を，自らが 10 年をかけ体験し提唱した．三人の天才の発想は，少なくとも 20 世紀の幾何学を主導するだけの力をもっていた．

では，20 世紀の幾何学に新たに現れた特筆すべき発想として何を挙げるのが妥当であろう．この問いはいささか早すぎるかもしれないが，近年の幾何学の中の潮流の一つとして，圏論的な扱いの有用性が広く認識されていると感じる．20 世紀半ばの代数的トポロジーの進展やグロータンデックの提唱があり，対象を各々孤立させては考えず集め，射とよばれる付加構造を加えて一つのシステムと見なして圏（カテゴリー）をつくり，さらに適当な関手（ファンクター）により姿を変えさせると，隠れた構造が鮮明になりより本質に迫ることができる．おそらく圏論が提唱された当初その有用性に気づいていた研究者はごくわずかであったと想像されるが，圏と関手は昨今はいたる所に現れ，明示的に意識するか否かはさておき，幾何学研究者であれば避けて通ることはできないほどに広がっている．コンセビッチのホモロジカルミラー対称性をこの土壌に載せたのは深谷圏である．ホバノフは自らの仕事を結び目の不変量の圏化と称した．また，最近 3 次元トポロジーにおけるバーチャルハーケン予想がエイゴルとワイズにより解決されたが，証明では，基本群と普遍被覆の組が作る変換群の圏をキューブ化という関手で群とキューブ複体からなる変換群の圏へうつし，3 次元のかけらもない議論が展開されている．まさに発想の転換の勝利である．本特集の記事のいくつかにも，圏と関手による研究の有用性の言及がある．

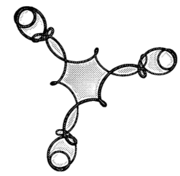
もちろん，圏と関手が 20 世紀の幾何学における唯一の最も大きな影響を与えた発想と主張しているのではなく，あくまで一つの特筆すべき発想ということである．例えば，サーストンも 20 世紀後半から 21 世紀初頭の幾何学のとくに 3 次元トポロジーの進展にたいへん大きな影響を与えたが，私にはその仕事に圏論的発想を読み取ることはできない．

何に興味が集まり，それを如何にスマートに表現するかは，時代の進展にともない変遷する．数学にも流行がある．だからその発想は，過去の蓄積の上に積み重なるように進化する．幾何学は，ガウスの時代には目に見える図形という具体的な対象があり，イメージが共有できる分野であった．しかしその後，リーマンやポアンカレの発想によりイメージは必ずしも普遍的とは言えない分野になった．そして今日では，対象である空間自身を直視するのでなく，関数や関手を使って姿を変えて扱うことがごく当り前になっている．イメージが本質だった時代から，イメージの中に本質が隠されていると考える時代になった．本特集は，現代幾何学のそうした現場を見事に映し出す記事を集めている．そして各記事を一読すれば，そこに展開される幾何学の研究の豊かさと広がりを体感できる．

（こじま・さだよし，東京工業大学大学院情報理工学研究科）

トポロジーの考え方

コーヒーカップとドーナツの同一視とは



村上 順

1. トポロジーとは

数学で最初に扱う概念は「数」である．りんごとみかんが何個かずつあるとき，1個ずつ対応させることで，みかんとりんごのどちらがたくさんあるか，あるいは同じ数だけあるのかがわかる．さらに，個数の概念を用いると，いちいち対応させてみなくてもどちらがいくつ多いかが分かるようになる．水のように一つ一つに分けられないものでも，単位となる量を決めれば，その何個分になるかということで，同じ容器に入れて比べてみなくても多い少ないが分かる．これが数学の考え方の基本で，直接対応を作って比べなくても違いが分かるように様々な概念が構成されてきた．

図形についても，2つの図形を比べるときは，まずは重ねて見る．ぴったり重なるとき，一方の図形の点一つ一つがもう一方の図形の点一つ一つにきれいに対応しているのである．紀元前に書かれたユークリッドの『原論』においても，長さや角度といった幾何における基本的な概念が，このような重ね合わせの方法により丁寧に構築されている．

さて，重ならないが同じような図形というのもたくさんある．大きさが違うとか，ちょっと歪んだだけということもある．我々が日常見ている図形にしても，たいていは斜めから見ているわけで，同じ「形」といっても，形の捉え方には様々なレベルがある．重なり合うものが同じというのは「合同」という概念であるが，大きさだけ違う「相似」という概念もあれば，直線を直線にうつし，直線上の長さの比を保つアフィン変換，単に直線を直線にうつすだけの射影変換など，図形を変換する方法ごとに様々な幾何学が構築されてきた．ちなみに，目に見えている図形はもとの図形に射影変換を施したものとなっている．

そこで，図形を比べるための変換として，連続写像をとってみよう．合同変換では角度と長さが保たれるが相似変換では長さは保たれない，しかし，直線は直線にうつり，角度は保たれている．これがアフィン変換や射影変換になると，直線は直線にうつるが長さも角度も保たれなくなる．この図形の間の変換の条件をもっと緩くして，連続性を保つという条件のみを課して図形の性質を調べようというのが**トポロジー（位相幾何学）**である．

図形から図形への対応が「連続」であるというのを正確に説明するには ϵ–δ 論法というのが必要になるが，簡単にいうと，ある点 P の近くにある点が，うつした先でも P の行き先の近くになければならないということである．ゴムひもを引っ張ってもその上の2点が「近く」にあれば，引っ張った後でもそんなに離れていない．ところがこのゴムひもが切れたとすると，切れた点の両側の点は，もともと近くにあったのにも関わらず，切れた後では全く関係ない点になってしまう．このような場合を**不連続**といい，このようなことがないような2つの図形の間の対応を用いて，その特徴を調べようというのである．

2. 同相な図形

2つの図形 X と Y に対し，この2つが連続な対応により「重なる」ときにトポロジカルには同じ「形」の図形であると考えるのであるが，この「重なる」ということを正確に言い直すと，X から Y への連続な対応 f と，逆に Y から X への連続な対応 g があり，互いに逆対応，すなわち X の点 x に対しては $g(f(x)) = x$, Y の点 y に対しては $f(g(y)) = y$ となることである．このような対応があるとき，X と Y は**同相**であるという．

同相になる典型的な例は，空間中で連続的な変型でうつり合う場合である．伸ばしたり縮めたりする変形は連続なので，大きく変形されたものでも同相になるものがある．よく例にあげられるのが副題のコーヒーカップとドーナツである (図 1)．コーヒーカップを，まだ窯で焼く前の柔らかい粘土でできたものと思って，そのカップの部分をつぶしていって，取っ手の部分だけにしてしまうとドーナツと同じ形となる．また，逆にドーナツについても，揚げる前の種の柔らかい状態であれば，その一部分を引きのばしてカップの形にすることができる．これらの変形は，途中で引きちぎったり穴をあけたりしないで行うことができ，このことが「連続」なことと対応している．

先の変形は粘土をイメージしたものであったが，今度はゴム膜をイメージした変形を考えてみる．風船と浮き輪について，これらが同相になるかどうかを見てみよう (図 2)．浮き輪をつかんで握りしめ，そこで切って穴をテープで塞ぐと，細長い風船のようになるが，このような切ったりする操作は連続ではない．また，風船を浮き輪の形に変形するのはもっと大変で，風船を両手で挟んで押しつぶし，両側の面を貼り合わせた上で穴をあけると，浮き輪の形となるが，もちろん，これも穴をあける操作があるため，連続ではない．このように，風船と浮き輪は，切ったり穴をあけたりする操作なしでは対応をつけることが難しそうなのであるが，トポロジーの手法を使えば，風船と浮き輪が同相でないことをきちんと示すことができる．実際，あとで紹介するオイラー数により，この2つが同相でないことが示される．

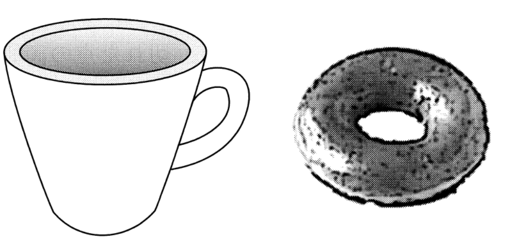


図 1　コーヒーカップとドーナツ．

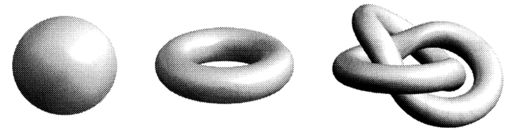


図 2　ボール，浮き輪，絡まった浮き輪．

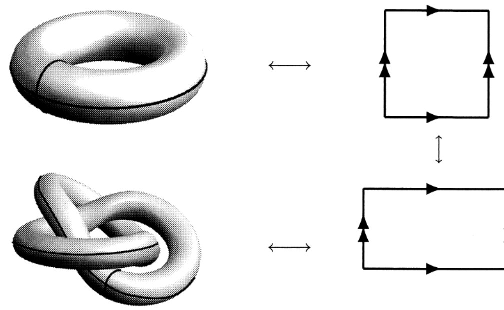


図 3　絡まっていない浮き輪と絡まった浮き輪の対応．

今度は，図 2 にある絡まっていない浮き輪と絡まった浮き輪を比べてみよう．空間中では，絡まってない浮き輪から連続的な変形で得ることはできない．ここでこの2つの浮き輪を切り開いてみよう．図 3 のように浮き輪を切り開いてのばすと右のような長方形になる．この長方形の上下の辺と左右の辺を矢印の向きに張り合わせたものがもとのトーラスである．また，絡まった浮き輪についても同じように切り開くことで長方形となり，この2つの長方形は伸ばしたり縮めたりすることで重ねることができる．この2つの長方形の対応から，もとの2つの浮き輪の間の連続な対応がつくので，この絡まってない浮き輪と絡まった浮き輪とは同相である．

3. 同位な図形

2つの図形が同相かどうかを見るのはトポロジーでの基本であるが，図2の浮き輪と絡まった浮き輪のように，同相であっても空間中の連続変形では重ねることができないものが存在する．そこで，連続変形で互いにぴったり重ね合わすことができるときは，特に**同位**（**イソトピック**）であるということにする．2つの図形 X, Y に対し，X を Y にぴったり重ねる連続変形があり，さらに，逆に Y を X にぴったり重ねる連続変形があるときに X と Y は同位であるというのである．連続変形というのはとてもフレキシブルな変形で，ときには思いもよらないものが同位だったりする．

私は学生時代は主に代数を学んでいて，トポロジーのことはあまり勉強していなかったのであるが，代数が結び目理論に使えるということで少しずつトポロジーの世界に足を踏み入れていき，トポロジーについての講義もするようになった．ところが，初めてトポロジーについて講義をするときに，参考書[1)]を見ると次のような問題が出ていてびっくりした．図4のような絡まったメガネがほどけてしまうというのである．右手，左手それぞれで親指と人差し指で輪を作ったとき，この輪が絡まった状態と絡まっていない状態とが同位，つまり親指と人差し指を離さないまま一方から他方へうつれるということである．どう頑張ってもできそうもないのだが，実は親指の付け根の関節が自由に動かせれば可能である．実際どうやるかは Meditation on homotopy of embedding[*1)] という動画でみることができるが，この動画はトポロジーの不思議さをよく表現している．最近では大分慣れたが，トポロジーの勉強を始めた頃は想像を絶する図形の変形にずいぶんと悩まされ，今でもまだ戸惑うことがある．

4. 一筆書き

トポロジーの考え方は，オイラー（Leonhard Euler, 1707–1783）に始まるといわれている．彼はケーニヒスベルクという町にいたことがあるのだが，当時，この町には図5のように7本の橋が架かっており，町の人たちは，この橋を1回ずつ通ってもとに戻ってくる方法がないだろうかということを話題にしていた．これに対して，オイラーはこれが不可能であることを証明したのである．まず，川で隔てられた4つの陸地を黒丸で表し，橋を辺で表すことで，橋の地図を図5の右図のように簡略化する．すると，問題はこの各辺を1回ずつ通ってもとに戻る方法があるかどうか，というものになる．

この図を見ると，それぞれの黒丸からは奇数本の辺が出ている．ここで，スタートとゴールが一致する一筆書きがあったとし，各辺に一筆書きで進む方向に向きを入れると，各頂点に対しそこに向かう辺とそこから出ていく辺の数が同じにならなければいけないので，頂点につながっている辺は偶数本でなければならないことになる．ところが，ケーニヒスベルクの橋に対応する図では，どの頂点でもこの数が奇数になっているので，一筆書きは存在せず，橋を1回ずつ通って元に戻ってくるような方法も存在しないのである．

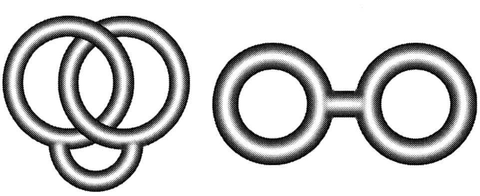


図4　連続的に変形できる2つの立体．

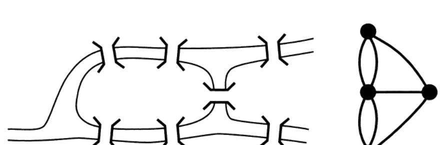


図5　ケーニヒスベルグの橋．

*1）VideoMath-Festival at ICM '98, DVD, Springer に収録されている．

5. オイラー数

トポロジーがオイラーに始まるというのは，オイラー数という，同相な図形に対しては同じ数になるものを幾何の研究に使ったことにもよっている．オイラー数は大変有名なものであり，知っている人も多いと思うが，曲面の場合についてその定義を述べよう．ここでは，曲面は普通の曲がった曲面ではなく，有限個の多角形を貼り合わせたものでできていると考える．このとき，全体の面の数を f，辺の数を e，頂点の数を v とし，

$$\chi = f - e + v \qquad (1)$$

のことを**オイラー数**と呼ぶ．

オイラー数は曲面を多面体で表す表し方によらない，辺に頂点を一つ追加すると，辺は２つに分かれ，v と e が１ずつ増えるので，オイラー数 χ は変わらない．既存の２つの頂点を結ぶ新たな辺を加えて多角形を２つに分割するときも e と f が１ずつ増えてやはり χ は変わらない．さらに，曲面の２通りの多面体による表示があるときは，この２通りを重ねてできる多面体を考えることで，この２通りの多面体表示のオイラー数が等しいことが分かる．

球面を多面体として表示する例としてサッカーボールを見てみよう．最近のワールドカップなどでは，複雑にカットされた素材を貼り合わせたボールが使われているが，通常のものは，図６のように12枚の５角形（黒い部分）と20枚の６角形（白い部分）を貼り合わせたものとなっており，面は合わせて32枚ある．また，辺は90本，頂点は60個あるので，$32 - 90 + 60 = 2$ よりサッカーボールのオイラー数は２であることが分かる．このことから，球面と同相な図形であれば，オイラー数はいつも２である．

一方，浮き輪については，図３の長方形で見ると，面が１つで，辺は４本が２つずつ同一視されていて実は２本で，頂点は４個がすべて同一視されているので１個と数えて，$\chi = 1 - 2 + 1 = 0$ となり，オイラー数は０であり，球面のオイラー数とは異なっている，このことから，球面と浮き輪の間には連続な対応がないことが分かるのである．

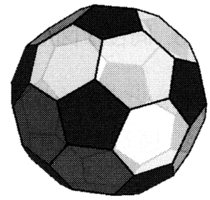


図６　多面体の例（サッカーボール）．

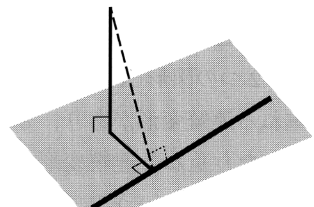


図７　三垂線の定理．

私がオイラー数について初めて聞いたのは中学のときに正多面体の分類について習ったときである．私の通っていたのは，何の変哲もない公立中学だったのだが，そのときの数学の先生で，ときどき変わったことをしてくれる人がいた．あるときはこれから述べる正多面体の分類の話をし，また，あるときは三垂線の定理というのを立体視のキットにしたものを皆で見るというようなこともあった．

まだ電卓が普及する前のことで，このキットは，紙に印刷されたものを紙箱に入れて見る，という単純なものであった．三垂線の定理にはいくつかバリエーションがあるが，一つは図７の状況のもとで，点線が太線と直交するというものである．ベクトルを使えば簡単に証明できるので，現在は定理としては教科書からは消えているようであるが，立体を扱うための最も基本的な定理である．ただ，中学生にとっては，立体視を使って説明されても，目の前には垂直に交わるいくつかの直線が見えるだけで，何が仮定で何が定理なのかよくわからなかったのであるが，それでも，今でも覚えているぐらいなので，とにかく，立体に慣れてほしいという先生の願いは伝わったようである．

さて，正多面体の分類に戻ろう．正多面体の各

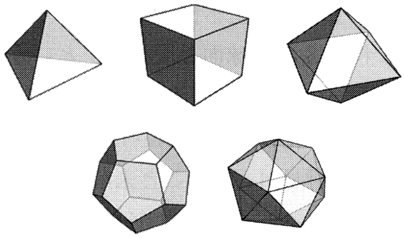


図8　5つの正多面体.

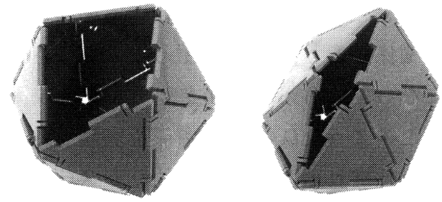


図9　2面取り除かれて変型する正20面体

面を a 角形とし，各頂点には b 枚の a 角形が集まっているとする．ただし，$a, b \geq 3$ である．この正多面体の面，辺，頂点の数をそれぞれ f, e, v とすると，辺の両側に面があり，面のまわりには a 本の辺があることから $2e = af$ が成り立つ．また，辺の両端に頂点があり，頂点からは b 本の辺が出ていることから $2e = bv$ が成り立つ．これら2つの関係式をオイラー数の定義式 (1) に代入すると

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{e}$$

となるが，e が正の整数なので

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

となる．これを満たす (a, b) を全部書き出すと，

$$(a, b) = (3, 3),\ (3, 4),\ (3, 5),\ (4, 3),\ (5, 3)$$

の5通りで，それぞれが正4面体，正8面体，正20面体，立方体，正12面体に対応している．正多面体が5通りしかない (図8) ことは知っていたが，角度の情報のようなもの，例えば頂点での尖り具合など使って示すものと思っていたので，とても意外だった.

6. 正多面体の形

正多面体の話には続きがあって，大学で数学科に進み，ゼミに入ると，ゼミの先生が数学以外のものも含めていろいろな問題を出してくれたのだが，その一つに，正多面体の一意性を証明せよ，というものがあった．凸な多面体の形は一意的に決まることが知られているが，この証明が意外と難しいというのである．多面体をパチパチと貼り合わせることのできるおもちゃを使って正20面体を作り，その隣り合う2枚の3角形を取り除くと図9*2)のように変型できるようになるのだが，もう1枚3角形をはめると動かなくなり形が決まる．触ってみると確かにかっちりとしているのであるが，その証明は皆目見当がつかなかった．ところが，その後数学専攻以外の大学院生に幾何を教える授業を受け持つ機会があり，参考書を探しているうちに，証明の書かれている本[2)]を見つけた.

この本によると，凸多面体の一意性は最初にコーシー（Augustin Louis Cauchy, 1789–1857）の1813年の論文で証明されたのだが，実は不完全で，最初の完全な証明は1934年に発表されたそうである．そして，本では1967年に発表された証明*3) が，これまでで最も簡単な証明として紹介されている．コーシーはある場合を見逃していたのであるが，そこが明瞭に説明され，最後には，球面のオイラー数が2であることより証明が完結する.

7. ホモロジー群

現在のトポロジーでは，オイラー数だけでなく，様々な道具が使われているが，最も重要なのはホモロジー群であろう．ホモロジー群とは，はやりの言い方でいうとオイラー数を「カテゴリー化」したものである．曲面などからオイラー数を定義するときは，多面体の面などの数の情報のみを用い

*2)　JOVO International, Denmark のパズルで作成.

*3)　I.J. Schorenberg and S.K. Zaremba: On Cauchy's lemma concerning convex polygons, *Canad. J. Math.* **19** (1967), 1062–1077.

た．しかし，面の間には隣り合っているかどうかという関係があり，また，面と辺の間にも，面のふちになっているかどうかという関係がある．そこで，このような隣接する関係を表現する，カテゴリーと呼ばれるような数学的なシステムをうまく作り，このシステムを通してオイラー数が得られるようにしようというのである．

実際には，面や，辺，頂点の形式的な 1 次結合からなる加群を構成し，ここに**境界写像** ∂_r を定義することで，ホモロジー群と呼ばれるものが構成され，この階数からオイラー数が定まる．ここで r は，境界を考える図形の次元である．向きを考慮すると $\partial_{r-1} \circ \partial_r = 0$ となり，∂_r の像の境界は 0 になる．そこで，∂_{r-1} で 0 になるもの全体のなす加群を ∂_r の像で割った群を H_r とすると，これは多面体への分割の仕方によらず同相な図形に対してはいつも同じ群が対応し，オイラー数は曲面の場合

$$\chi = (H_2\text{の階数}) - (H_1\text{の階数}) + (H_0\text{の階数})$$

となる．

ホモロジー群は，幾何ばかりでなく，「境界」にあたる概念が定義できるすべてのもので使え，20 世紀の数学において最も成功した数学理論の一つである．現在ではファイバー束の理論とあわせて，理論物理学においても基本的な道具となっている．

8. 基本群とポアンカレ予想

図形から作る群としては，基本群もよく使われる．図形上のある点 p からそこに戻ってくる「道」に対し，起点と終点を止めたまま連続的に変形してできる道はもとの道と同値と考えることで，群の構造が入るのである．ただし，ここでは，連続変型として，同位変型だけでなく，ホモトピーと呼ばれる，線が点に縮まるような変型も含めている．どのような道も自明な道，つまり p にじっとしているという道と同値なとき，基本群は単位元のみとなるが，3 次元の境界のない多様体，すなわちどの点のまわりも通常の 3 次元空間のようになっている図形でもって，基本群が単位元のみからなるとき，これは 3 次元球面と同相だ，という予想がポアンカレ（Jules-Henri Poincaré, 1854–1912）によって 20 世紀初頭に提唱された．これはポアンカレ予想と呼ばれ，長いこと未解決であったが，21 世紀に入り，ペレルマン（Grigory Yakovlevich Perelman, 1966–）によって解決された．これには，トポロジーの手法ばかりでなく，微分幾何学や熱方程式の理論も使われているのであるが，ポアンカレ予想の解決とともに，サーストン（William Paul Thurston, 1946–2012）による 3 次元多様体の幾何化予想も解決し，3 次元多様体の研究の大きな節目となった．

9. おわりに

最近では，タンパク質や DNA などの複雑な生体分子の研究においても，その空間的な特性を知るためにトポロジーの考え方が必要となっている．連続な変型や対応を考えることにより，「柔らかい」形を扱うトポロジーが生まれたのであるが，この曖昧な感じの概念を数学的に厳密に扱うためには，連続の概念の正確な定式化など近代数学の確立を必要としたため，ユークリッド幾何などと比べると大変新しい学問である．しかし，図形の大局的な様子を調べるのに非常に有用であり，現在では数学以外でも広く使われている．

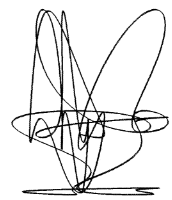
参考文献

1) S.C. カールソン（金信泰造訳）:『曲面，結び目，多様体のトポロジー』，培風館 (2003).
2) D.A. Singer: Geometry: *Plane and Fancy*, Springer (1997).

（むらかみ・じゅん，早稲田大学理工学術院）

ものの曲がり具合とは何だろうか

曲率



戸田 正人

1. 曲線と曲面の曲がり具合

数学の用語法の常として直線も曲線の一種だとか, 平面も曲面の一種だとかいうが, 日常的には「ものが曲がっている」といったとき, イメージするのはまっすぐな直線でない曲線とか, 平らな平面でない曲面とかそういうものだろう. 例えば平面 $\mathbb{R}^2$ の滑らかな曲線 C の各点には接ベクトル（速度ベクトル）が対応しているが, その接ベクトルの方向が C のどの点でも一定な曲線として「まっすぐな直線」は特徴付けられる. もう少し具体的に書けば, C の正則局所パラメータ $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to C \subset \mathbb{R}^2$ を取ると C の単位接ベクトルが $v(t) = \dot\gamma(t)/|\dot\gamma(t)|$ で与えられる. ユークリッド内積を $(,)$ で表すとその微分は

$$\dot v(t) = \frac{\ddot\gamma(t) - (\ddot\gamma(t), v)v}{|\dot\gamma(t)|}$$

と計算される. C が直線であることは $\dot v(t) \equiv 0$ で特徴付けられるから, $\dot v(t)$ は上に述べた素朴な意味で曲線 C の曲がり具合を記述する量と言ってよいだろう. $v(t)$ は単位ベクトルだから, $\dot v(t)$ は常に $v(t)$ と直交するので, $\gamma(t)$ における単位法線ベクトル $\nu(t)$ との内積 $\kappa(t) = (\dot v(t), \nu(t))$ が曲線 C の $\gamma(t)$ における「曲がりの量」である. κ は局所パラメータ γ によらずに定まる量であるが, ν の向きのとり方にその符号は依存する. j を $\mathbb{R}^2$ の $\pi/2$ 回転を表す線形変換とし, $j\nu(t) = v(t)$ と法線の向きを選ぶと $\kappa(t) = -(\dot v(t), jv(t)) = (\dot\nu(t), v(t))$ と書くこともできる.

空間曲面の場合も同じ形式で「曲がりの量」を定義できる. $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ を空間に埋め込まれた曲面とし, Σ の各点 p には単位法線ベクトル $\nu(p)$ で与えられていて, ν は p に滑らかに依存するものとする（つまり Σ には ν による向きが定められている）. Σ が「平らな平面」であることは $\nu(p)$ が $p \in \Sigma$ によらず一定であるという性質で特徴付けられる. この性質は p における Σ の接ベクトル v を任意にとり, v の方向への微分 $D_v\nu(p) = 0$ が常に成り立つことと言ってもよいから, $D_v\nu(p)$ が p における Σ の「曲がり方」を表す量となる. ν は単位法線ベクトルだから $D_v\nu(p)$ は $\nu(p)$ に直交するので p における Σ の接ベクトルと見なすことができる. したがって空間曲面の場合 p における「曲がり方」は接ベクトル空間 $T_p\Sigma$ の線形変換 A: $v \mapsto D_v\nu(p)$ で与えられることになる. 接ベクトル w とユークリッド内積を取ると $T_p\Sigma$ の双線形形式 $A(v, w) = (A(v), w)$ を得るが, こちらを考えても実質的に同じことである. A を線形変換と見るとき**型作用素**, 双線形形式と見るとき, **第二基本形式**と呼ぶ. A が対称作用素（双線形形式）であることは簡単に確かめられる. 少々煩雑にはなるが, 曲線の場合と同じように A を局所パラメータ $u : (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \to \Sigma$ の微分で表示することもできる. 実際, パラメータ x, y に関する偏微分をとり, 接ベクトル u_x, u_y を考えると

$$\nu(p) = \frac{u_x \times u_y}{|u_x \times u_y|}$$

と書くことができるから，その偏微分を用いて $A(u_x) = \nu_x$，$A(u_y) = \nu_y$ と計算される．

2. 内在的な量と外在的な量

それらが埋め込まれているユークリッド空間の内積を用いて，平面曲線や空間曲面の接ベクトル空間には内積（リーマン計量）が定まっていて，リーマン多様体と見ることもできる．リーマン多様体 M には2点を結ぶ「最短経路」の長さとして自然な距離空間の構造が定まる．ここで言う（滑らかな）経路 $c\colon [a,b] \to M$ の長さ $L(c)$ は

$$L(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)|\, dt \qquad (1)$$

で与えられるものである．もちろん $|\cdot|$ はリーマン計量に関する接ベクトルの長さである．平面曲線の場合，いわゆる弧長パラメータを考えることにより1次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}$ と局所的には等長的となることはすぐにわかるだろう．だから，平面曲線をリーマン多様体と見ると，閉曲線ならば適当な円周と，そうでなければ $\mathbb{R}$ と，等長的となる．つまり，リーマン多様体としての曲線の局所的性質はどの曲線も同じで，曲線の曲率はリーマン多様体 $\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}^2$ への埋め込み方を記述する量ということになる．

空間曲面の場合はもう少し事情は複雑である．局所パラメータ u を用いると，空間曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ のリーマン計量は3つの成分

$$E = |u_x|^2, \quad F = (u_x, u_y), \quad G = |u_y|^2$$

を用いて，$Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$ と表される．これを**第一基本形式**と呼ぶのが古典的な風習である．ガウスの有名な発見は型作用素の行列式は純粋に Σ のリーマン多様体としての性質のみに依存するというものである．

定理 1（ガウス）．型作用素の行列式 $\det A$ は第一基本形式のみに依る．$\det A$ を**ガウス曲率**という．

証明． 古典的な表記に倣い，A の3つの成分を

$$\begin{aligned}L &= (\nu_x, u_x) = -(\nu, u_{xx}),\\ M &= (\nu_x, u_y) = (\nu_y, u_x) = -(\nu, u_{xy}),\\ N &= (\nu_y, u_y) = -(\nu, u_{yy})\end{aligned}$$

とする．$\det A = (LM - N^2)/(EG - F^2)$ であるから，$LM - N^2$ を E, F, G で表せばよい．まず u の二階偏微分と一階偏微分の内積はすべて E, F, G で表されることに注意しよう．例えば，

$$\begin{aligned}&(u_{xx}, u_x) = \frac{1}{2}E_x, \quad (u_{xy}, u_x) = \frac{1}{2}E_y,\\ &(u_{xx}, u_y) = F_x - \frac{1}{2}G_x\end{aligned}$$

である．次に u の二階偏微分，例えば $u_{xx} \in \mathbb{R}^3$，を Σ の法線ベクトル成分 $u_{xx}^N = -L\nu$ と接ベクトル成分 u_{xx}^T に直交分解する．接ベクトル空間は u_x, u_y で張られるから，u_{xx}^T は u_x, u_y の線形結合で，その係数は $E, F, G, (u_{xx}, u_x), (u_{xx}, u_y)$ で表される．

$$\begin{aligned}W &= (u_{xx}, u_{yy}) - |u_{xy}|^2,\\ W^T &= (u_{xx}^T, u_{yy}^T) - |u_{xy}^T|^2\end{aligned}$$

とおくと，W^T は E, F, G で表され，$LN - M^2 = W - W^T$ である．W については

$$\begin{aligned}W \;=\; &\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}((u_x, u_{yy}) - (u_y, u_{xy}))\\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}((u_{xx}, u_y) - (u_{xy}, u_x))\end{aligned}$$

と計算して，u の二階偏微分と一階偏微分の内積によって書けるので結論が従う． □

型作用素 A のトレース $\operatorname{Tr} A$ を**平均曲率**という．$\operatorname{Tr} A \equiv 0$ の曲面は面積汎関数の停留点となり，**極小曲面**と呼ばれる．平均曲率とガウス曲率で決まる A の2つの固有値を**主曲率**という．主曲率は冒頭の素朴な意味での「空間曲面の曲がり具合」そのものといってよいだろう．

簡単な例を見よう．円柱

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1\}$$

の点 p を通り，S に含まれる z 軸と平行な直線 l

に沿って，S の法線ベクトルは一定であり，この方向の主曲率は 0 である．また z 軸と直交し，p を通る平面 π による断面は円周で，π と平行な接ベクトル $w \in T_pS$ 方向に A は固有値 1 を持つ．したがって S の平均曲率は 1，ガウス曲率は 0 である．一方，平らな平面（例えば xy-平面）は平均曲率もガウス曲率も 0 であるが，S のパラメータ $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto (\cos x, \sin x, y) \in S$ により S は xy-平面と局所等長である．つまり平均曲率，主曲率はリーマン計量のみでは決まらないことが分かる．ガウス曲率のようにリーマン計量だけで決まる量を内在的であるといい，リーマン計量だけでなく $\mathbb{R}^3$ への埋め込みが指定されてはじめて決まる量を外在的であるという．空間曲面の場合，曲面の曲がり具合（主曲率）は内在的な量（ガウス曲率）と外在的な量（平均曲率）の両方に依存して決まっている．両者は互いに独立というわけではなく，「相互作用」もある．例えば，簡単な不等式 $4\det A \leq (\mathrm{Tr}\,A)^2$ から極小曲面のガウス曲率は非正であることが分かる．本稿では以降ガウス曲率の一般化として得られる内在的な曲率について述べ，素朴な意味での空間の曲がり具合から内在的情報がどのように取り出されて，どのように表現されるかを説明していこう．

3. 接続と曲率

内在的曲率はリーマン多様体に対して定義されるはずである．前節の計算を振り返ると例えば x 軸に沿うベクトル場 u_x の x 方向への微分 u_{xx} は直交成分を持っていた．$\mathbb{R}^3$ のような「まわりの空間」のない状況では直交成分は意味をなさないので，接ベクトルの微分を「内在的」に定める必要がある．このベクトル場の微分を指定するのが**接続**である．多様体 M のベクトル場 X, Y に対して，接続はベクトル場 D_XY を定める．D_XY を X 方向への Y の**共変微分**という．D_XY は X, Y に双線形に依存し，C^∞ 級関数 f による積に関して次の性質を要請される．

$$D_{fX}Y = fD_XY,\ D_X(fY) = (Xf)Y + fD_XY.$$

第二式はいわゆるライプニッツ則である．これらの要請は点 p における $D_XY(p)$ がベクトル場 X の p における値 $X(p)$ と Y の p の近傍での挙動のみに依存することを導く．

D が与えられると M 上の曲線 c に沿うベクトル場 ξ の微分 $D_{\dot{c}}\xi$ が導かれ，とくに $D_{\dot{c}}P \equiv 0$ となるような P を c に沿って平行なベクトル場という．平行ベクトル場の方程式は一階線形常微分方程式となり，始点 $c(0)$ における初期値 $P(0) \in T_{c(0)}M$ で一意に解が定まる．線形同型 $T^t:\ T_{c(0)}M \ni P(0) \mapsto P(t) \in T_{c(t)}M$ を c に沿った**平行移動**という．通常の微分の定義と同様にして平行移動から共変微分を回復することもできる．

$$D_{\dot{c}}Y(c(0)) = \lim_{t\to 0} \frac{T_t^{-1}Y(c(t)) - Y(c(0))}{t}. \quad (2)$$

ユークリッド空間の場合と違い，接続の平行移動は曲線 c の始点，終点のみでは決まらず，その間の経路に依存する．とくに，c の始点と終点が一致している場合，閉曲線 c を一周回って得られる平行移動は $T_{c(0)}M$ の線形変換 h_c となるが，h_c は一般には恒等変換ではない．h_c を閉曲線 c に沿った**ホロノミー**という．

ベクトル場 X, Y, Z に対して

$$R^D(X,Y)Z := D_XD_YZ - D_YD_XZ - D_{[X,Y]}Z$$

と定めると，ライプニッツ則から R^D は $(3,1)$ 型テンソルとなる．つまり，p における左辺の値は $X(p), Y(p), Z(p)$ のみで決まる．R^D を**曲率テンソル**という．例えば，ベクトル場 Z がどの方向 X にも平行 $D_XZ \equiv 0$ を満たせば，明らかに $R^D(\cdot,\cdot)Z \equiv 0$ である．逆に $R^D = 0$ であれば，各点に近傍で定義された平行なベクトル場 $Z_1, \ldots, Z_n$ で各点で TM の基底をなすものが取れる．これはその近傍に含まれる閉曲線に関するホロノミーが常に自明であることと同じである．この意味で曲率テンソルは局所自明なホロノミーを持つための障害である．M がリーマン多様体の場合，平行移動が計量を保つことを要請することは自然だろう．さらに

$$T^D(X,Y) = D_X Y - D_Y X - [X,Y]$$

で定められる $(2,1)$ 型テンソルが 0 であることを仮定すると接続がただ一つ定まる．この接続をリーマン多様体の**レヴィチヴィタ接続**という．例えば空間曲面の場合，局所パラメータ u の二階微分の接平面方向の成分 $D_X Y = (XYu)^T$ を対応させるとレヴィチヴィタ接続が得られる．レヴィチヴィタ接続の曲率を**リーマン曲率**と呼び，単に R と書くことにする．

4. 測地線と曲率

曲率という以上何かの「曲がり具合」を表す量には違いないが，前節の定義だけではリーマン曲率の幾何的な意味はあまり明らかでない．すでに述べたようにリーマン多様体は「最短経路」の長さで距離が与えられるような距離空間，つまり測地空間である．最終的にリーマン曲率の幾何的な意味を測地構造を用いて記述したいのだが，まずリーマン多様体の測地構造について簡単に述べる．

「最短経路」と括弧付きで書いているのは一般の測地空間では必ずしも 2 点を結ぶ最短経路の存在を仮定しないからだが，リーマン多様体 (M,g) の場合は状況はそう難しくない．任意の点 $p \in M$ の適当な近傍 U_p が存在して，$q \in U_p$ と p を結ぶ最短経路は常に存在する．さらに (M,g) が距離空間として完備でありさえすれば，任意の 2 点を結ぶ最短経路が存在する．γ を $|\dot\gamma| \equiv l$ を満たすパラメータが与えられた M の曲線とする．γ を $Y = \delta\gamma$ の方向に変分するとき，(1) の長さ汎関数 L の変分を計算するとレヴィチヴィタ接続 D を用いて第一変分公式

$$\delta_Y L(\gamma) = \left[\left(\frac{\dot\gamma}{l}, Y\right)\right]_a^b - \int_a^b \left(\frac{D_{\dot\gamma}\dot\gamma}{l}, Y\right) dt$$

が得られる．そのオイラー・ラグランジュ方程式 $D_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ の解を**測地線**という．測地パラメータが与えられているとき（$l = 1$ のとき）とくに**正規測地線**と呼ぶ．この方程式は二階常微分方程式で，初期ベクトル $\dot\gamma(0) \in T_pM$ で決まる一意的な時刻 0 の近傍で定義された解が存在する．初期ベクトル $v \in T_pM$ を持つ解 $\gamma(t)$ が時刻 1 まで存在すれば，$\exp_p v = \gamma(1)$ と書く．2 点を結ぶ最短経路 γ はもちろん測地線であるが，最短経路でないが測地線となるものは存在する．例えば球面の測地線は大円の弧だが，π より長い測地線は最短経路ではなくなる．逆にユークリッド空間の測地線はすべて最短経路である．しかし測地線は局所的には最短経路である．実際，点 $p \in M$ の近傍 U_p を p と $q \in U_p$ を U_p 内で結ぶ測地線がただ一つの最短経路しか存在しないように取ることができる．このとき，適当な $0 \in T_pM$ の近傍 $\Omega_p \subset T_pM$ が存在して，$\exp_p$ が Ω と U_p の間の微分同相を与える．

一般に T_pM の 2 次元線形部分空間 P の正規直交基底 X,Y に対して $K(P) = (R(X,Y)Y, X)$ は X,Y のとり方によらず定まる．$K(P)$ を**断面曲率**という．（すべての P に対する）断面曲率は曲率テンソルを決定する．断面曲率が P によらず定数 κ であるような多様体を**定曲率空間**という．ユークリッド空間は $\kappa = 0$，球面は $\kappa = 1$，双曲空間は $\kappa = -1$ の定曲率空間である．これらを**空間形**という．逆に単連結完備な定曲率空間はこれらの空間のリーマン計量を定数倍することによって得られる．

測地線 γ において，長さ汎関数の第二変分を計算すると断面曲率が現れる．

$$\begin{aligned}
&\delta_Y^2 L(\gamma) \\
&= \left[\left(\frac{\dot\gamma}{l}, D_Y Y^N\right) + \left(\frac{D_{\dot\gamma} Y^N}{l}, Y^N\right)\right]_a^b \\
&\qquad - \frac{1}{l}\int_a^b (D_{\dot\gamma} D_{\dot\gamma} Y^N + R(Y^N, \dot\gamma)\dot\gamma, Y^N) dt \\
&= \left[\left(\frac{\dot\gamma}{l}, D_Y Y^N\right)\right]_a^b \\
&\qquad + \frac{1}{l}\int_a^b |D_{\dot\gamma} Y^N|^2 - (R(Y^N, \dot\gamma)\dot\gamma, Y^N) dt.
\end{aligned}$$

ここで，Y を γ に接する成分 Y^T と直交する成分 Y^N に直交分解している．γ が最短経路であれば，もちろん端点を固定する変分について $\delta^2 L(\gamma) \geq 0$

であるが，第二変分公式の第二式から断面曲率が非正である場合，この条件は常に満たされる．この事実からユークリッド空間の測地線が常に最短経路であるが，球面の場合はそうでない理由を見て取ることができる．

$x \in M$ の基点 $p \in M$ からの距離を $\rho(x)$ と書くと，ρ の微分も変分公式から計算できる．ただし p, x を結ぶ最短経路 $\gamma : [0,1] \to M$ がただ一つだけ存在して，γ の初期ベクトル $\dot\gamma(0)$ の近傍 V で $\exp_p$ が x の近傍 U への微分同相を与えるものとする．このような点 x を p に対して**正則**であるという．このとき，$v \in V$ に対して，$\exp_p v$ はすべて正則となることが分かる．x を通る曲線 $c(s)$ を考えると，$\rho(c(s))$ は $\exp^{-1}(c(s))$ を初期ベクトルとする測地線 γ_s の長さ $L(\gamma_s)$ に等しい．したがって，γ の変分 γ_s を考えることにより，ρ の微分が計算できることになる．第一変分公式と測地線の方程式を用いると $\operatorname{grad}\rho(x) = \dot\gamma(1)/\rho(x)$ であることが分かる．第二変分公式の第一式の積分項に現れる二階微分作用素

$$J(Y) = D_{\dot\gamma}D_{\dot\gamma}Y + R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma$$

はヤコビ作用素と呼ばれる．J は直交分解 $Y = Y^T + Y^N$ を保つ．$J(Y) = 0$ を満たす Y を**ヤコビ場**という．Y^T は一次関数と接ベクトルの積で $Y^T(t) = (at+b)\dot\gamma(t)$ と書けるので，重要なのは**直交ヤコビ場** Y^N である．測地線の族 γ_s に対して，$Y_s(t) = D_{\frac{\partial}{\partial s}}\gamma_s(t)$ とおくと，測地線の方程式を s で微分することにより Y_s（およびその直交分解の成分）が $Y(0) = 0$ を満たすヤコビ場であることが分かる．このことから ρ のヘッシアンは

$$D_Y \operatorname{grad}\rho(x) = \frac{D_{\dot\gamma}Y^N}{\rho(x)} \tag{3}$$

と計算される．

5. 比較定理

比較定理と呼ばれるリーマン幾何の一連の定理は2つのリーマン多様体 (M_1, g_1), (M_2, g_2) の間に適当な曲率の不等式を仮定して，それらの上の

測地構造に関わる量の大小関係を与えるものである．これはリーマン曲率の不等式の幾何的な解釈を与える．まず局所的比較定理について述べよう．

定理 2（ラウチの比較定理）．(M_1, g_1) の断面曲率の上限 κ_1 と (M_2, g_2) の断面曲率の下限 κ_2 が $\kappa_1 \le \kappa_2$ を満たしているものとする．$i = 1, 2$ について，$p_i \in M_i$ と p_i に対して正則な点 $q_i \in M_i$ を取り，それらを結ぶただ一つの最短経路 γ_i は正規測地線とする．$l = L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$ であり，Y_i を γ_i に沿って非自明な直交ヤコビ場で $Y_i(0) = 0$ を満たすものとするとき，

$$\frac{(D_{\dot\gamma_1} Y_1(l), Y_1(l))}{|Y_1(l)|^2} \ge \frac{(D_{\dot\gamma_1} Y_2(l), Y_2(l))}{|Y_2(l)|^2}. \quad (4)$$

2つの異なる空間を比較するのは難しいと思うかもしれないが，この定理の証明はかなり直接的である．少し面白いので手順だけ述べよう．まず式 (4) の分母の $|Y_i(l)|$ は正規化定数である．この正規化の下で $|Y_i(l)| = 1$ と仮定して良い．このとき，γ_i に沿った平行移動を T_i^t で表そう．このとき，$\mathcal{Y}_1(t) = (T_i^t)^{-1} Y_1(t)$ は接ベクトル空間 $T_{p_1} M_1$ の曲線と見ることができる．式 (2) を用いて，ヤコビ場の方程式を読み替えると $\mathcal{Y}_1(t)$ はやはり二階線形常微分方程式を満たす．また T_i^t は計量を保つので正規化の結果 $\mathcal{Y}_1(l), (T_2^t)^{-1} Y_2(l)$ はともに単位ベクトルとなる．このことから $T_{p_1} M_1$ と $T_{p_2} M_2$ の間の線形同型 i で $i^* g_2 = g_1$ を満たすもので $i(\mathcal{Y}_1(l)) = (T_2^t)^{-1} Y_2(l)$ を満たすものを選ぶことができる．$\overline{Y_1(t)} = T_2^t(i(\mathcal{Y}_1(t)))$ として構成される γ_2 に沿ったベクトル場は $\overline{Y_1(l)} = Y_2(l)$ を満たす．その結果 $Y = \overline{Y_1} - Y_2$ は両端で 0 となるベクトル場となるが，γ_2 が最短経路であることから，第二変分が $\delta_Y^2 L(\gamma_2) \ge 0$ を満たす．$\overline{Y_1(l)}$ は再び式 (2) を用いると M_1 のリーマン曲率を係数とする二階線形常微分方程式を満たすが，この方程式と曲率に関する仮定を用いて左辺に現れる積分を評価することで結論が得られる．

式 (3) を思い出すと結論の不等式 (4) は距離関数のヘッシアンの比較を与えている．比較定理は通常片方の空間をモデル空間としてよく性質のわかっている空間，とくに空間形，にとって適用される．例えば，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ のヤコビ場 Y は測地線に沿った平行ベクトル場 P と一次関数の積 $Y(t) = (at + b)P(t)$ で書けるが，$M_1 = \mathbb{R}^2$ と取ると，式 (4) は非負曲率リーマン多様体 (M_2, g_2) の距離関数の自乗 $\rho_{M_2}^2$ のヘッシアンはユークリッド空間のそれ（2 に等しい）より小さいことを導く．つまり，すべて p_1, p_2 に対して正則な点を通る M_1, M_2 の正規測地線 c_1, c_2 について $f(t) = \rho_{\mathbb{R}^2}^2(c_1(t)) - \rho_{M_2}^2(c_2(t))$ は $f'' \ge 0$，とくに f は凸関数となる．

一般に考えている空間 X の 3 点 p, q, r を最短経路で結んでできる三角形 $\triangle pqr$ に対して，同じ 3 辺の長さを持つモデル空間 $\overline{X}$ の三角形 $\triangle\overline{pqr}$ を**比較三角形**という．qr の内分点 x と同じ比で $\overline{qr}$ を内分する点を x' とする．今の場合 X は（完備）非負曲率リーマン多様体，$\overline{X}$ は $\mathbb{R}^2$ である．両端で 0 の値を取る凸関数 $f(t)$ が負であることに注意すれば，辺 qr の点がすべて p に対して正則であれば，$\rho_{M_2}(x) \ge \rho_{\mathbb{R}^2}(\overline{x})$ が成り立つ．この結論から正則性に関する仮定を取り除いた結論がトポノゴフの定理である．ここまで来ればリーマン曲率の幾何的な意味合いは明確であろう．

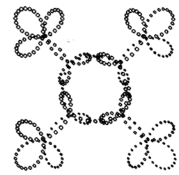
定理 3（トポノゴフの定理）．完備リーマン多様体 (M, g) の断面曲率は κ より大きいものとする．(M, g) の三角形 $\triangle pqr$ に対して，曲率 κ の空間形 M_κ に比較三角形 $\triangle\overline{pqr}$ を取るとき，$\rho_M(x) \ge \rho_{M_\kappa}(\overline{x})$ が成り立つ．

ラウチの定理では局所的量である曲率の不等式を用いて，f の二階微分の非負性を導くことで f が凸関数であることが従ったが，f が凸であるという性質は別に微分とは無関係な概念である．正則性の仮定を外してもその凸性が保たれる（標語的には二階微分が発散するにしても正の無限大に発散する）ことを確かめることでラウチの比較定理をトポノゴフの定理に「大域化」することができる．実際この部分の議論はいろいろやり方があるし，技術的な問題なのだが，リーマン幾何の局所的な結論を大域化する際によく現れる状況である．

トポノゴフの定理はリーマン曲率の不等式に幾何的な意味を与えるばかりではない．定理3の結論がすべての三角形について成り立つような測地空間を曲率 $\geq \kappa$ を持つということにすれば，必ずしもリーマン多様体でない測地空間にもリーマン曲率（の不等式）の定義を拡張できる．この条件を満たす空間を**アレクサンドロフ空間**と呼ぶ．グロモフ・ハウスドルフ位相のような粗い意味でリーマン多様体や測地空間の列が収束するような場合にも定理3の結論のような大域的関係は極限で保たれやすい．これは曲率のような局所的な量と大きく異なる点である．グロモフにより空間列の収束のような超越的な手法がリーマン幾何に持ち込まれた際にも定理3は重要な背景であった．

（とだ・まさひと，お茶の水女子大学理学部）

代数幾何に至る発想



小林　正典

はじめに

これを書いている現在，3 年生はどのセミナーに行こうかと迷う時期である．学生さんが，セミナーではどのようなことを勉強するのか，研究できるのか，質問にやって来る．きらきらした瞳にやる気を感じて，こちらの応対にも自然に熱がこもる．

「せっかく研究室を訪ねてくれたのだから，代数幾何がどのような考え方をする分野か，話してみましょうか．」

幾何という名前のつく分野はいろいろあって，位相幾何（トポロジー），微分幾何，微分位相幾何と様々である．その中で代数幾何は，名前からすると，代数を用いて幾何を研究する分野と読める．これは厳密には狭すぎる，使う手法はもっと広い，と感じることもある．しかし，分野の基本的特徴はうまく捉えていると思う．

高校数学の範囲では，例えば数学 II の「方程式と図形」が典型的な代数幾何であり，「点と直線」，「円」，「軌跡と領域」に分かれている．「点と直線」では平面の点は 2 つの実数の組 (x, y) で表され，その間の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ の解集合が直線である．ただし a, b の少なくとも一方は 0 でないとする．また，方程式に 0 でない定数を掛けても，同じ直線を表す．

異なる 2 直線の共有点は，$ax + by + c = 0$ と $a'x + b'y + c' = 0$ を連立させて求めればよい．大学で学ぶ線形代数を用いてみよう．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

を用いて $A\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{c}$ と表せる．もし比 $a : b$ と $a' : b'$ が異なれば，係数行列 A には逆行列があり，よって解 (x, y) がただ 1 つ存在する．すなわち，共有点がただ 1 つ存在する．比が同じであれば A の階数は 1 である．2 直線が異なるから拡大係数行列 $(A \ -\boldsymbol{c})$ の階数は 2 となり係数行列の階数と異なるから，解は存在しない．すなわち共有点は存在しない．

与えられた直線 $l : ax + by + c = 0$ と，l の外にある点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ をとる．$d = ax_0 + by_0$ とおけば，直線 $l' : ax + by - d = 0$ は l と係数の比が同じで点 P を通る唯一の直線である．l とは異なるから上の結果より l と共有点をもたない．P を通るその他の直線は係数の比が l と異なるから共有点をもつ．以上から，ユークリッド (Euclid) の第 5 公準「直線 l と直線外の P に対して，P を通り l と共有点をもたない直線 l' がただ 1 つ存在する」が示された．このような直線 l' は l と**平行**であるという．

よって点を座標で表す枠組みは，第 5 公準を満たすことがわかった．そして，2 直線 $ax+by+c = 0$ と $a'x + b'y + c' = 0$ が平行であるとは，係数の比 $a : b$ と $a' : b'$ が同じことであるということも計算でわかった．

1. 代数幾何は間接的な幾何学である

1.1 デカルトの解析幾何

現在のように，点を座標すなわち数の組で表す方法が導入されたのは，17 世紀にデカルト (Descartes) が著した哲学書『方法序説』の付録『幾何学』においてである．それに因んで，直交座標のことを「デカルト座標」とも言う．

座標を導入したことの大きなご利益が２つあると思う．

１つ目は，幾何の問題を解く方法を天才から凡人に開放したことである．それまでの初等幾何では，証明にあたりしばしば巧妙な補助線を引く必要があった．補助線を見つけることでそれまで手が付かなかった問題がスパッと解ける快感はこたえられない．いろいろ試行錯誤しながら考えることは面白く，教育的でもある．とはいえ，しょっちゅうひらめきを要求されるということは，問題解決の手法としては万人向けではないであろう．

デカルトの手法は**解析幾何**[*1] と呼ばれ，幾何の問題を代数に翻訳することで機械的に解けるようにする．幾何的情報を座標によって代数的情報に翻訳し，式の言葉で問題を解析し，幾何的意味に解釈し直す．必要なら代数の形式的な一般論を発展させることで，問題を解く強力な手法を提供できる．

２つ目は，より本質的であると思うが，幾何的対象を直接扱わないことである．古代ギリシャにおいてユークリッドの『原論』としてまとめられた初等幾何では，点や直線といった幾何的対象を，そのまま論理の対象として扱っていた．

しかし解析幾何では，点などの幾何的情報は文字式に置き換えて扱う．幾何的対象からいったん離れ，間接的に幾何的対象を知覚し，解釈する．そのことは，現実を別の世界にモデル化する知的働きに似ている．代数幾何は，本質的に，現象のモデル化に適しているのではないだろうか．

1.2 数学の対象は実在するか

小平邦彦先生がエッセイ「数学の印象」の中で「数覚」と呼んだように[6]，多くの数学者はまっとうな数学的対象を実在するものとして感じていると思う．例えば，(理想的な) 球面について，丸いとか有界であるとか滑らかであるとか，それが目の前にないのに共通の認識のもとで一緒に語ることができる．

一方，デカルトは，世の中にあるものが本当に存在するか，徹底的に疑った．そしてついに，考えている自分自身は疑いなく存在していることに気付き，「我思う，故に我有り」と述べたのであった．

数学的対象が，多くの人が共有する客観的実在なのか，それとも，脳が作り出した主観的な幻に過ぎないのか，有名な論争がある[2]．数学者コンヌ (Connes) と神経科学者シャンジュー (Changeux) の議論は，有神論者と機械論的無神論者の争いに似た様相を呈し，最後まで平行線を辿る．

どちらが正しいかはともかく，人間が実在すると感じるとき，外界の事物を感覚器官を通じて脳が処理し，脳内で虚像を構成しているのだということは大事なことであろう．代数幾何では，幾何を座標を介して式の世界に取り込んで，デジタル処理を行った結果を見ているのである．

2. 代数幾何は得意分野から入れる

2.1 三位一体

最初に射影空間の定義を復習しておく．$n+1$ 次元ベクトル空間の中で，原点を通る直線 (1 次元部分空間) の全体を n 次元**射影空間**と呼び $\boldsymbol{P}^n$ で表す．直線は方向を指定すれば決まるから，射影空間の点は方向ベクトルの比と対応する．$\boldsymbol{P}^n$ は n 次元ベクトル空間に「無限遠点」からなる超平面を付け加えてコンパクト化した空間であるとみなせる (詳細は幾何の入門書を見よ)．

以下では複素数を係数として考える．1 次元射影空間 $\boldsymbol{P}^1$ は**射影直線**と呼ばれる．$\boldsymbol{P}^1$ は比 $x:y$ の全体であり，複素数 x を $x:1$ と同一視すると，複素平面 $\boldsymbol{C}$ に無限遠点 $1:0\,(=\infty:1)$ を付加したものである．

函数論において，$\boldsymbol{P}^1$ 全体で定義された有理型関

*1) 数学の分野の解析 (極限操作を伴う無限小解析) とは違う．

表1 三位一体.

幾何	非特異複素射影曲線
解析	コンパクトリーマン面
代数	一変数代数関数体

数（正則関数でないところは極のみ）は，多項式の比 $f(x)/g(x)$ すなわち**有理関数**に他ならないことが示される．有理関数の全体は $\boldsymbol{C}(x)$ と書かれる．

逆に $\boldsymbol{C}(x)$ と同型な体があれば，超越元 x に対応する関数を座標として射影的実現 $\boldsymbol{P}^1$ ができる．

以上の操作を一般的に行うことができる．

ある複素射影空間内でいくつかの多項式の共通零点集合として表された（複素）1 次元部分多様体，すなわち**非特異複素射影曲線** M を考える．

M は自然にコンパクトな 1 次元複素多様体，すなわち**コンパクトリーマン**（Riemann）**面** R の構造をもつ．

任意のコンパクトリーマン面 R 上の有理型関数の全体 K は体をなす．K は複素数体上超越次元が 1 の拡大体であり，1 **変数代数関数体**と呼ばれる．

1 変数代数関数体 K に対し，$\boldsymbol{C}$ 上の超越元 x と $\boldsymbol{C}(x)$ 上代数的な元 y が存在して $K = \boldsymbol{C}(x, y)$ と書ける．x に複素数値を代入して動かせば，点 $(x, y) \in \boldsymbol{C}^2$ の集合は代数曲線として実現される．射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ にコンパクト化して正規化という操作を行うと非特異複素射影曲線 M を得る．

この操作は 3 回続けて行うと出発点と同型な対象を得て，これら M, R, K はそれぞれの同型類が一対一に対応する[5)]．つまり，幾何的に考えても，解析的に考えても，代数的に考えても，等価な対象を扱うことになるのである．これを代数曲線論における「**三位一体**」（trinity）ということがある（表 1）．本来の「三位一体」はキリスト教における用語で，父（神）・子（キリスト）・聖霊は一体である，というものである．

2.2 安定な概念

このように，全く異なる観点から研究したにも関わらず等価になる概念があるとき，その概念は安定であり重要であると判断することがある．

表2 クライン特異点.

型	群	定義多項式
A_n	n 次巡回群	$x^{n+1} + y^2 + z^2$
D_n	二項二面体群	$x(x^{n-2} + y^2) + z^2$
E_6	二項四面体群	$x^4 + y^3 + z^2$
E_7	二項八面体群	$y(x^3 + y^2) + z^2$
E_8	二項二十面体群	$x^5 + y^3 + z^2$

有名な例を挙げよう．20 世紀前半に，アルゴリズムにより計算できるという概念の定式化が，様々な観点からなされた．チューリング（Turing）機械で受理できること，十分強力なプログラム言語でプログラム可能であること，帰納的関数になること，等々．これらがすべて等価であることが示されたとき，チャーチ（Church）の提唱により，すべて同じ概念とみなして「**計算可能**」と呼ぶことにした．

複素代数幾何でもう 1 つ例を挙げよう．$\boldsymbol{C}^2$ に有限群が作用するとき商空間に現れる，**クライン**（Klein）**特異点**と呼ばれる特異点がある（表 2）．$\boldsymbol{C}^3$ 内の曲面と思うか，等々，見方に応じて様々な同値な定式化があり，それに応じて別名をもつ．デュヴァル（du Val）特異点，有理 2 重点，ADE 特異点，2 次元標準ゴレンシュタイン（Gorenstein）特異点，2 次元単純特異点，等々．実際，「有理 2 重点と単純臨界点の 15 通りの特徴付け」[3)]という論文があるほどである．文献 7) でその雰囲気を知ることができる．

このような状況に触れるとき，先にも述べたことであるが，数学的実在あるいはイデアのようなものがどこかにあって，代数とか幾何とか解析とかいった区別は，それを調べる手段にすぎない，そして，扱っている対象がそれなりにまっとうなものである，と感じるのである．

勉強する観点からすると，代数幾何は得である．1 つの山の登山道は 1 つとは限らない．複素多様体論を使う道，可換代数を使う道，函数論を使う道．全部知っておかないといけないわけではなく，得意な分野から入っていけばよい．どこから登っても「曲線岳」の頂に着けるのである．もちろん山の北側の景色は南側からは見えないかもしれな

いが，それでも登ったあとで他の登山道の様子を眺めれば，おおよその感じはわかるものである．

■ 3. 代数幾何は双対性により基礎付けられる ■

様々な方向から登り始めることができるといっても，今日もっとも一般的な道は，可換環論に基づいた登山道である．その基礎にあるのは，空間を考えることと，その上の（あるクラスの）関数の全体を考えることはほぼ等価である，ということである．まずそれを説明しよう．

3.1 連続関数で決まる空間

位相空間 X 上の複素数値連続関数の全体を $C(X)$ とする．$C(X)$ の元 f と，X の点 P とを与えると，f の P における値 $f(P)$ が定まる．

通常の値の演算により，$C(X)$ は単位的可換 C^* 代数になる．つまり，$f, g \in C(X)$ に対し，和 $f+g$ と積 fg を $(f+g)(P) = f(P)+g(P)$，$(fg)(P) = f(P)g(P)$ で定める．零元，単位元はそれぞれ定数関数 $0, 1$ である．複素数値なので共役 $f^*(P) = \overline{f(P)}$ も定まる．

点 P で値が 0 になる関数 $f \in C(X)$ の全体を m_P で表す．m_P は $C(X)$ の真のイデアルになることが容易に従う．実は m_P は極大イデアルであること（m_P を真に含むイデアルは $C(X)$ しかないこと）を説明しよう．$f \in C(X) \setminus m_P$ とする．$f(P) \neq 0$ であり，任意の $g \in C(X)$ に対し，$g - \frac{g(P)}{f(P)} f \in m_P$ である．これは $g \in m_P + (f)$ を表すから，$C(X) = m_P + (f)$ である．よって m_P は $C(X)$ の極大イデアルである．

点 P から極大イデアル m_P が定まるということは，逆に，C^* 代数が与えられたときその極大イデアルから点が復元できることを示唆している（というのが，代数病の始まりである）．

実際，次の**ゲルファント**（Gel'fand）**・ナイマルク**（Naĭmark）**双対性**が知られている．

定理 3.1 単位的可換 C^* 代数 A は，あるコンパクトハウスドルフ空間 X に対する $C(X)$ と同型である．

さらに，コンパクトハウスドルフ空間 X と Y が同相であることと，$C(X)$ と $C(Y)$ が単位的可換 C^* 代数として同型であることは同値である．

3.2 代数多様体

ふつう代数幾何で扱う関数は，連続関数より狭い．

X を $\boldsymbol{C}^n$ の中で，m 個の多項式 $f_1, \ldots, f_m$ の共通零点集合とする．$\boldsymbol{C}[x_1, \ldots, x_n]$ の元で表される関数を X 上の**多項式関数**という．X 上の関数として恒等的に 0 である多項式の全体を I とすると，I は $f_1, \ldots, f_m$ を含むイデアルである．多項式関数の全体は $\boldsymbol{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$ と同型な環になり，これを X の座標環という．

逆に，A を座標環のように $\boldsymbol{C}$ 上有限個の元で生成される（被約な）代数とする．ヒルベルト（Hilbert）の基底定理によれば，A は多項式環 $\boldsymbol{C}[x_1, \ldots, x_n]$ の有限生成イデアル $(f_1, \ldots, f_m)$ による剰余環として表される．幾何的に言うと，A に対応する空間 X は $\boldsymbol{C}^n$ の中で連立方程式 $f_1 = \cdots = f_m = 0$ の解集合である．

X はアフィン代数多様体と呼ばれ，特異点をもつかもしれないが，座標近傍とみなす．座標で点が定まるよう分離公理を満たしつつ，X たちを有限個貼り合わせたものが**代数多様体**である．

3.3 概型

空間と環の双対性を推し進めて，可換環があれば，対応する空間ができるというのが，グロタンディック（Grothendieck）による**概型**（スキーム）の理論である．

変形や退化の現象では部分多様体が重なるものも出てくるが，概型の枠組みでは自然に扱える．

整数論とのつながりでは，係数体として，複素数体のような標数 0 の体だけでなく，標数が正の体を考えることも重要である．有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ の上で考えることで，標数の異なる体も一つに束ねて扱えるようになる．解を代数体の整数環の範囲で考えることもできる．方程式が本体で，どのような数で考えるかでその時々に応じた実体が現れる．佐藤幹夫氏はこれを本地垂迹説に例えている[8)]．一

般の可換環に空間を対応させたことで，整数論でも強力な幾何的道具を用いることが可能になった．

単位的可換環 A があるとき，アフィン代数多様体に対応する座標近傍としては，A の素イデアル全体の集合 $\operatorname{Spec} A$ を用いる．極大イデアルは0次元の点に対応するが，素イデアルは部分代数多様体に対応する．ふつう，ザリスキ（Zariski）位相（方程式の解集合を閉集合とする位相）という弱い位相を入れ，さらに正則関数のなす環の層を付けて，局所環付き空間として扱う．このあたりの道具立てを勉強するのは一仕事である．

代数化をさらに推し進めると，可換とは限らない環を与えて空間とみなす，ということになる．これは非可換代数幾何と呼ばれている．ログ幾何やトーリック幾何と近いトロピカル幾何では，もはや環ではなく，引き算のない半環を扱う．

■ 4. 代数幾何は上部構造である ■

複素多様体は複素構造を忘れると向き付けられた可微分多様体と思えるし，さらに位相多様体，位相空間とも思える．そこで，可微分構造の上部構造としての複素構造，複素構造の下部構造としての可微分構造，といった言い方をする．

代数幾何は対象が狭い分，深く研究ができる．

4.1 代数幾何の不変量

複素多様体では下部構造で定義された不変量も自由に使える．これは便利である．

位相空間 M に対し，（特異）ホモロジー群 $H_i(M, \boldsymbol{Z})$ という可換群が定まる．その階数は19世紀イタリアの数学者ベッチ（Betti）に因み，i 次元の**ベッチ数**と呼ばれる．

多様体を区別したいときに不変量が役立つ．M_1 と M_2 が複素多様体として同型であれば，同相でもあるから，それらのベッチ数は等しいはずである．よって，もし M_1 と M_2 のベッチ数に食い違いがあれば，それらは同型でないと結論付けられる．

また，代数多様体 X を射影空間に埋め込んで調べようと思ったとする．射影空間には同次座標が入っているので，埋め込めるならば X にもその同次座標（の X への制限）があるはずである．同次座標が埋め込みを与えるほど豊富に存在するか知りたいとき，代数幾何独自の不変量（連接層のコホモロジー群）が必要になる．次元の交代和を取ると位相不変量になるので指数定理など下部構造の定理が使える．そして消滅定理など代数幾何特有の定理を組み合わせて計算するのである．

4.2 モジュライ空間

下部構造をもつことで，独特の奥深い空間が構成できるのも代数幾何の魅力である．

可微分多様体を1つ与えたとき，その上に複素構造がどれくらい載るであろうか．分類する集合に自然な幾何構造を載せたものを**モジュライ空間**という．分類される空間と同様の幾何構造をもち，大変美しく興味深いものができることが多い．

コンパクトリーマン面は向き付けられた閉曲面である．位相多様体と見ても可微分多様体と見ても構造の入れ方は一意的であり，浮き輪の穴の数すなわち**種数** g という非負整数と一対一に対応する．$g = 0$，つまり球面 S^2 と同相であれば，複素多様体としても $\boldsymbol{P}^1$ と同型になる．モジュライ空間は1点である．しかし $g = 1$ のときは複素構造の入れ方は複素1次元のパラメータ j で与えられ，モジュライ空間は $\boldsymbol{C}$ と同型になる．$g \geq 2$ のとき $3g - 3$ 個の複素変数でパラメータ付けできることはリーマンがすでに与えていた．モジュライ空間にも複素構造が入るのである．

■ 5. 代数幾何は高次元では同値類で考える ■

5.1 双有理幾何

三位一体は，次元が2以上では崩れてしまう．例えばコンパクト複素曲面が2つあったとき，有理型関数のなす体が同型であっても，曲面として同型であるとは限らない．これを説明しよう．

曲面 M の非特異点 P において，P を $(0, 0)$ とする局所座標 x, y を取る．P を通る直線の方向は比 $x : y$ で与えられるので，どの方向から点 P に近づくかを区別するため（P の近傍で）写像 $M \setminus P \to \boldsymbol{P}^1$ を $(x, y) \mapsto x : y$ で与える．この

グラフは $M \times \boldsymbol{P}^1$ の部分多様体になるが，その閉包 $\tilde{M}$ を取って P の部分も埋めると，比 $x:y$ ごとに異なる点ができる．射影 $\sigma: \tilde{M} \to M$ を M の P における**爆発**（blow-up）という．P の逆像 $\sigma^{-1}(P)$ は比 $x:y$ の全体からなる射影直線であり，**第一種例外曲線・(−1) 曲線**と呼ばれる．

爆発は P 以外の点では同型となるため，関数体は M でも $\tilde{M}$ でも同じになる．関数体を 1 つ固定しても，対応するコンパクト複素曲面はいくらでも存在するのである．

ところが，たいていの場合，曲面には余分な (−1) 曲線が含まれていて，カステルヌオヴォ（Castelnuovo）の判定条件によると，爆発の逆操作で非特異点に潰すことができる．潰せるだけ潰したものは（相対）**極小**であると呼ばれる．

2 変数の代数関数体を与えれば，適当な射影的実現を取ってから上の爆発（の類似）で特異点を解消し，さらに（相対）極小モデルを取ることにより，たいていの場合は，有理関数体と極小モデルの間の一対一対応ができる．一意性が成り立たない場合は，相対極小モデルは射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ であるか，ある曲線上の $\boldsymbol{P}^1$ をファイバーとするファイバー束になり具体的な形がわかる．

有理関数体が同じであれば不変に保たれる性質を研究するのが**双有理幾何**である．

もちろん，アーベル多様体や $K3$ 曲面のように双有理同値類を取らずに扱う対象も多いが，それらと双有理な多様体が同様に丁重な扱いを受けているわけでもない．

双有理幾何では，多変数函数論といった解析的手法や，フロベニウス（Frobenius）作用といった正標数の手法も盛んに用いられている．

5.2 導来圏同値

（代数・解析）多様体上のベクトル束は連接層に一般化され，さらにその複体から連接層の導来圏が構成される．導来圏は，部分多様体やその上のベクトル束といった，その多様体から得られる観測データすべての総体を表すようなものである．多様体を超弦理論などの空間モデルとして考えた場合，導来圏が同値であればモデルとしては等価であり，区別する本質的必然性はない．

多様体のクラスによっては，導来圏が同値であれば多様体も同型である，ということが成り立ち，曲線の場合は実は導来圏を加えた「四位一体」となるのである．

おわりに

「代数病」が進むと，脳内の代数こそがすべてであり，幾何的実在の制約は邪魔になる．映画「マトリックス」のような仮想現実世界の中で生きるようなものである．しかし観測でわかることがすべてであるという見方は現代の科学の視点をちゃんと反映しているようにも思う．

20 世紀までの代数幾何の歴史や，入門者向け解説としては文献 4) が読みやすい．また，幾何の特集の中で恐縮であるが，手法から代数幾何は代数系にしばしば含まれ，文献 1) の記事が参考になるであろう．

参考文献

1) 別冊・数理科学，「代数学の魅力—進化する多彩な数学とその交流」，2009 年 4 月，サイエンス社．

2) J.-P. Changeux, A. Connes, *Matière à pensée*, Éditions Odile Jacob, 1989;（邦訳）ジャン・ピエール・シャンジュー，アラン・コンヌ（浜名優美訳），『考える物質』，産業図書，1991；（英訳）— (edited and translated by M.B. DeBevoise), *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics*, Princeton Univ. Press, 1995.

3) A.H. Durfee, Fifteen characterization of rational double points and simple critical points, *L'enseignement Mathématique* **25** (1979) 131–163.

4) 飯高茂，上野健爾，浪川幸彦，『デカルトの精神と代数幾何 増補版』，日本評論社，1993.

5) 岩澤健吉，『代数函数論 増補版』，岩波書店，1952.

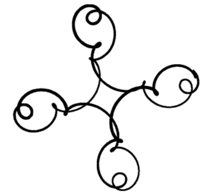
6) 小平邦彦，「数学の印象」，『怠け数学者の記』，岩波現代文庫，岩波書店，2000（初出：数学のすすめ，1969）.

7) 松澤淳一，『特異点とルート系』，すうがくの風景 6，朝倉書店，2002.

8) 佐藤幹夫，「数と関数」，数理科学 1974 年 8 月号 (No.134)，ダイヤモンド社.

（こばやし・まさのり，首都大学東京大学院理工学研究科）

特異点



石井　志保子

『特異点入門』[4]という大学院生向けの教科書を書いてから 16 年が経過した．それを英訳するという依頼を頂いて，いま最後の仕上げの作業に入っているところである．この作業の中で『特異点入門』を読み返してみると隔世の感がある．この 16 年間で特異点の研究は想像もつかなかったような方向へ飛躍的に発展してきたのだった．その発展は

(1)　高次元の極小モデル理論の進展,

(2)　弧空間の応用,

(3)　正標数の応用

によってもたらされた．この稿では，特異点とは何か，ということから始め，上記の 3 つの項目に触れながら特異点の研究を紹介したい．

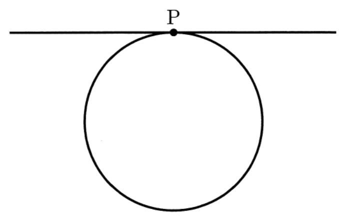


図 1　直径 5 cm の円と接線.

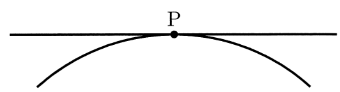


図 2　直径 20 cm の円と接線.



図 3　直径 12,742 km の円と接線.

1. 特異点とは何か

はじめに特異点とは何か，なぜそのようなものを考察するのかを考えよう．

1.1 地球は平らだ！

まず平面上の円を考えよう．円は「曲線」だ．つまり曲がっている．円上の 1 点 P とその接線を考えると，接線と円は P で接しているが別のものである (図 1, 図 2)．しかし円の直径をどんどん大きくしていくと，接線と円はどんどんくっついてきて，地球の直径（12,742 km）ぐらいになると，もはや接線と円は見分けがつかないくらいぴったりとくっついてしまっている（図 3)．

球面でもそうだ．直径 3 cm ぐらいの球面では，球面上の 1 点 P で接している接平面と球面は明らかに違うものだと見分けがつく．しかし地球の直径ぐらいの球面では，もはや接平面と球面はくっついてしまっている．昔の人が,「地球は平らだ」と思い込んでいたのはもっともだ．このように図形上の 1 点 P の周辺をどんどん拡大していくと平らになってしまう点を**非特異点**あるいは**通常点**と呼ぶ．点とは呼ぶが，ここでは点だけを考えているのではない．その点を載せている図形 X（上記の場合は球面）との組 (X, P) を考え，非特異点と呼ぶのである．

非特異点ではない点を**特異点**と呼ぶ．つまりその点の周辺をどんなに拡大しても平らにならない点が特異点なのだ．図 4，図 5 の原点 O は特異点である．

1.2 いろいろある

さて，これまでに出てきた図形は円，球面，平面上の曲線のグラフなど限られたものであったがもっと一般的なものを考えよう．半径 1 の円は $x^2 + y^2 - 1 = 0$ という方程式を満たす平面上の点 (x, y) の集合で，半径 1 の球面は $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ をみたす空間内の点 (x, y, z) の集合であるということを考え，図 4，図 5 のグラフも含めこれらを統一的に表すことにする．さ

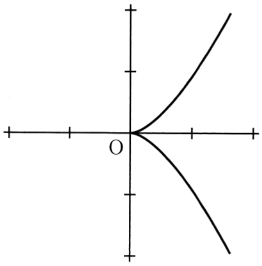


図 4　$y^2 - x^3 = 0$ のグラフ.

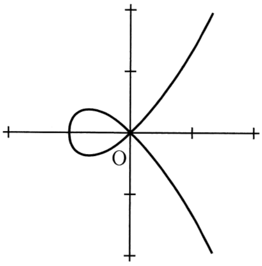


図 5　$x^2 + x^3 - y^2 = 0$ のグラフ.

らに欲張り，図形の入っている空間は何次元でも良いことにする．n を任意の自然数とし，n 次元空間内で多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ に代入すると値が 0 になるような点 $(x_1, \ldots, x_n)$ の集合を今まで出てきた例はすべてこれに当てはまっている．さらにもっと欲張ろう．

定義 1　n 次元空間内で有限個の多項式 $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n)$ に代入すると値がすべて 0 になるような点 $(x_1, \ldots, x_n)$ の集合を考え，これを**代数多様体**あるいは単に**多様体**と呼ぶ．これは英語では **variety** と呼ばれる．

バラエティーというのは，「バラエティー番組」というように日本でもよく使われる言葉で「いろいろある」という意味であることはよくご存知だろう．実際，多様体はいろいろある．3 次元空間内の，一つの方程式で決まる多様体だけでも多種多様で，例えばウィーン大学のヘルビック・ハウザー氏の作ったホームページ（http://homepage.univie.ac.at/herwig.hauser/bildergalerie/gallery.html）を見ていただければ，実にいろいろな形があることがわかる．このページではそれぞれの多様体にハト（Taube）やひな菊（Daisy）などかわいい名前のついたものの他，天国と地獄（Himmel und Hölle）やゲイシャ（Geisha）などという不思議なネーミングのものもある．そして当り前のように特異点が現れている．例えば Daisy は $(x^2 - y^3)^2 - (z^2 - y^2)^3 = 0$ という方程式で定義され，

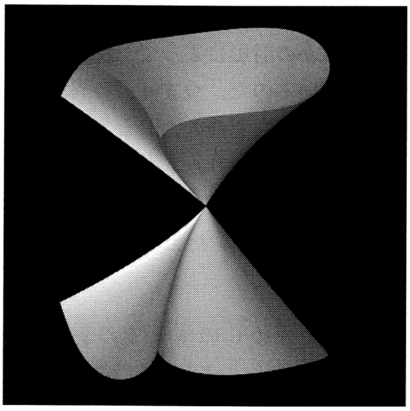


図 6　Daisy（http://homepage.univie.ac.at/herwig.hauser/bildergalerie/gallery/daisy.jpg より）．

図 6 のように真ん中の尖った点で特異点を持っている．また，上部左の 2 本の稜線も特異点の集合である．

さてこれまでずいぶん欲張って一般的な対象（多様体）を考えてきたが，もっと欲張ろう．これまでは実数の空間だけを考えてきた．つまり，点 $(x_1, \ldots, x_n)$ の各座標に入る値が実数のものだけを考えてきたが複素数のものや標数正の体などのものも考える．一般に多様体を次のように定義する．

定義 2　X が k **上の多様体**であるとは，ある有限個の多項式 $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n)$ が存在して，

$$X = \{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n \mid f_1(a_1, \ldots, a_n) = 0, \ldots, f_r(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$$

と表されているときである．ただし，k は任意の体である．

2. 特異点解消

特異点というのは実に多種多様で，それが面白いという見方もあるかもしれないが多様体の本質をとらえるには，邪魔な存在である．数学の本質は「単純で美しいはずである」という信念を数学者なら誰もが持っている．しかし特異点を持つ多様体を正確に記述しようとすると，大変難しく，うまく記述できたとしても，複雑で美しくないものになってしまう．そこで，20 世紀前半には，「特異点のある多様体というのは，多様

体の仮の姿である．本来の姿は非特異な多様体であって，それが何らかの射影によって，特異点のある多様体に射影されているのだ．つまり，特異点のある多様体は非特異な多様体の影なのだ」と人々は信じ，本来の姿を取り戻す試みを繰り返してきた．これが**特異点解消問題**である．この問題は 20 世紀半ばに，広中平祐先生により標数 0 の体 k 上の多様体について解決された．

定理 1（**広中**） 標数 0 の体 k 上の多様体 X はブローアップという操作により，非特異な多様体 Y に変換される（この Y を X の**特異点解消**と呼ぶ）．

この結果は数学の世界に大きな衝撃をもって迎えられた．そして，この結果のおかげで標数 0 の多様体の研究が飛躍的に発展した．また，特異点そのものの研究も，特異点解消を用いて大きく進展したのだ．例えば特異点を特徴づけるいろいろな概念，**有理特異点**や特異点の**種数**，**端末特異点**，**標準特異点**，**対数的標準特異点**などが特異点解消を使って導入され，無秩序に見えた特異点の世界が，美しい秩序にしたがって存在していることがだんだん分かってきたのだった．

一方正標数の体上の特異点解消定理はまだ証明されておらず，この場合は，標数 0 の場合と同様には物事が進まないのだった．これに関しては 5 節で触れる．

3. 極小モデル理論

この節では，基礎体は常に標数 0 の体の一つである複素数体 $\mathbb{C}$ とする．したがって，任意の多様体 X は特異点解消を持つ．しかしここで注意しなければならないことがある．一つの多様体 X の特異点解消 Y は一意的ではないのだ．実際一つの特異点解消 Y の 1 点でブローアップして得られた Y_1 はまた非特異になり，X の特異点解消になる．さらに Y_1 の 1 点でまたブローアップして Y_2 を構成すると，これもまた X の特異点解消になる…，というように一つの多様体 X の特異点解消は無限にあるのだ．これは X の特異点を研究する上であまり好ましくないことである．幸い X の次元が 2 のときは特異点解消の中でも「極小のもの」Y が存在する．つまり，X の任意の特異点解消 Y' は特異点解消 Y をブローアップして得られる．そしてこの特異点解消 Y は一意的なのだ．「極小」という言葉を使ったが，多様体の大小は，Y をブローアップして Y' が得られたとすると Y は Y' より小さいと見なすのである．この意味で極小の特異点解消が，2 次元の場合にはある．この極小の特異点解消は顕著な良い性質を持っているので，これを用いて 2 次元の特異点はいろいろなことが分かって，特異点の細かい分類もできるようになった．

このような極小性を持つ特異点解消は 3 次元以上の場合にあるのだろうか．この問題を「**局所的極小モデル問題**」と呼ぶ．

一方で**射影多様体**（すなわち k 上の射影空間 $\mathbb{P}^n$ の斉次多項式 $f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_r(x_1,\ldots,x_n)$ に代入すると値がすべて 0 になるような点 $(x_1,\ldots,x_n)$ の集合）で非特異なものたちをすべて考え，その中で極小になっているものがあるのかという問題を「（**大局的**）**極小モデル問題**」と呼ぶ．こちらも 2 次元の場合には，満足のいく解答が得られている．

ところが 3 次元以上になると，局所的極小モデル問題も大局的極小モデル問題も否定的な解答を突きつけられることになる．局所的極小モデル問題についての反例を挙げよう．

例 1 多様体 X を次のように定義する．

$$X=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{C}^4 \mid xy-zw=0\}.$$

このとき，X は極小の特異点解消を持たない．

模式的に図を描いてみると図 7 のようになる．X は原点 $\mathrm{O}(0,0,0,0)$ で特異点を持ち，この点でブローアップすると Y のような形になる，ここで，ブローアップによって X の原点 O に対応している部分を E とすると，E は射影直線の直積 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ と一致する．$p_1:E\to\mathbb{P}^1$ を第 1 成分への射影，$p_2:E\to\mathbb{P}^1$ を第 2 成分への射影とする．E を p_i の方向につぶす Y のブローダウンを Y_i $(i=1,2)$ とすると Y_1,Y_2 はともに非特異となり，X の特異点解消であり，X の原点に対応する部分が 1 次元多様体 $\mathbb{P}^1$ である．もし X が極小の特異点解消 Y_0 を持てば，Y_0 から何らかのブローアップで Y_1,Y_2 が得られなければならないので Y_0 の中で X の原点と対応している部分は 1 点でなければならず，必然的に Y_0 と X は同じものになる．これで Y_0 が特異点解消であることに矛盾が出る．

このように 3 次元以上では局所的極小モデル問題も大局的極小モデル問題も絶望的である．「しかしそれは我々が『非特異な極小モデル』，『極小モデルは一意的』に拘ったからであって，もし緩やかな特異点を持つことを許し，一意性を要求しなければ，極小モデル

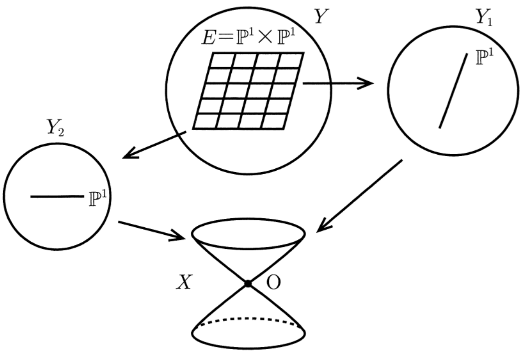


図7　3 次元で，極小解消がない例．

は存在するのではないか？」これが**現代的な極小モデル問題**である．極小モデルに許す緩やかな特異点は，1980 年代は端末特異点であったが，その後いろいろなバージョンが研究されてきた．以下の定理は 3 次元の場合は森重文氏により，4 次元以上の場合は Birkar, Cascini, Hacon, MacKernan[1] により証明された．拙著『特異点入門』を書いたのは森氏の 3 次元の結果が出た後で，4 次元以上のことはほとんど分かっていなかった頃である．本の中でも「一般次元で極小モデル問題が肯定的に解決されれば，これこれの結果が導かれる」という形の命題をいくつか書いた．論文[1] が出版された今，まとめている英語版には，「極小モデル問題が肯定的に解決されれば」という仮定が不要になったのは喜ばしいことである．

定理 2（**局所的極小モデル定理．森，Birkar, Cascini, Hacon, MacKernan**）X を 3 次元の $\mathbb{C}$ 上の多様体とすると，端末特異点のみをもつ特異点部分的解消で極小性を満たすものが存在する．また標準特異点までを許すと，極小な特異点部分的解消は極小のものが一意的に存在する．ここで部分的解消とは，X を何らかのブローアップで変換して得られるものであるが，緩やかな特異点とはいえ，特異点は持つので本当の意味の解消ではないことから，このように呼ぶことにする．

4. 弧空間

この節の多様体は標数 0 の体 k 上に定義されているとする．

定義 3　多様体 $X \subset k^n$ の弧とは，X 上の t をパラメーターとする微小な曲線のことである．すなわち $P=(a_1,\dots,a_n)\in X\subset k^n$ を中心とする弧とは X 上の

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_1^{(j)}t^j, \sum_{i=0}^{\infty} a_2^{(j)}t^j, \dots, \sum_{i=0}^{\infty} a_n^{(j)}t^j\right) \in X$$

なる曲線である．ただし $a_i^{(0)}=a_i\ (i=1,\dots,n)$ で，各座標に入っている級数は k 係数の形式的べき級数である．

X 上の弧全体の集合を X_∞ と表し，X の**弧空間**と呼ぶ．これは一般には無限次元の多様体になる．

このような弧を最初に考えたのはニュートンであるといわれているが，弧全体の集合を幾何学的対象として考えたのはナッシュである．彼は 1968 年に弧空間に関する論文をプリンストン大学の図書館に提出し，論文はプレプリントとして世界中の数学者の目に触れ，いろいろな論文に引用された．しかしなぜかどこにも出版されなかった．彼はゲーム理論による業績でノーベル経済学賞を受賞したが，長い間精神の病気で苦しんだようだ．上記のプレプリントも出版されたのがずっと後の 1995 年，ノーベル賞を祝う特別号であった．この論文でナッシュは弧空間における**ナッシュ問題**を提起した．筆者がナッシュ問題を知ったのは，ちょうど日本で，ナッシュを主人公としたハリウッド映画「ビューティフルマインド」が公開されているときだった．

ナッシュ問題：多様体 X の特異点の集合を中心とする弧の集合の既約成分と X の特異点解消の本質的因子は 1 対 1 に対応するか？

ここで特異点解消の**本質的因子**とは X の特異点解消 Y の中で X の特異点集合に対応する部分の中で，よけいなブローアップで得られたものではない，必要不可欠な部分のことである．一見何の関係もなさそうに見える，弧空間の部分集合と，特異点解消の本質的因子の対応を付けたのはナッシュである．しかしそれらが 1 対 1 に対応するかという問題はとても難しく，プレプリントが出回っていろいろな人がこの問題に挑戦したが，2 次元の最も扱い易いと思われている有理 2 重点でさえも長い間，証明されなかった．いやむしろ高次元のほうが早く結果が出た．以下は 2003 年の結果である．

定理 3（**石井，コラー**）　X が任意次元のトーリック多様体の場合，X の特異点の集合を中心とする弧の集合の既約成分と X の特異点解消の本質的因子は

1 対 1 に対応する．トーリック多様体でない場合は 4 次元以上で反例がある．

この定理でもお分かりいただけるが，この時点では 2 次元と 3 次元の場合はまだ未解明だった．この後 2012 年に 2 次元と 3 次元に関する結果が出て，最終的な決着がついた．

定理 4（ボバディラ，ペレイラ（**2 次元**），ドゥフェルネ（**3 次元**））2 次元のナッシュ問題は肯定的な解答を持つ．3 次元のナッシュ問題には反例がある．

ナッシュ問題は弧空間特有の問題であるが，弧空間は思わぬところに応用されることが分かってきた．1995 年弧空間上でモチビック積分を導入した Kontsevich により，**カラビ・ヤウ多様体**の**ホッジ数**が双有理不変であることが証明された．弧空間の他分野への応用の目覚めだった．この後，**完全交叉**標準特異点をジェットスキーム[*1)]の既約性で特徴づけるというムスタツァの結果が現れ，さらに多様体の特異点の悪さを計る**極小食い違い係数**を部分空間の特異点の極小食い違い係数と比較するという**逆添加公式**が弧空間を用いて証明され弧空間の有用性の認識は確立されたと言っても良いだろう．

この後，これまでの標準特異点，対数的標準特異点などの定義は双有理幾何学では自然なものであるが，弧空間の視点から見るとあまり自然でないことが分かってきた．より自然な「標準特異点」，「対数的標準特異点」が弧空間の視点から導入され，それらの正体が少しずつ解明されつつある．

5. 正標数の体上の特異点

これまでの節では基礎体 k はすべて標数 0 の体であった．正標数の体上の特異点を考えるとき，特異点解消定理がまだ証明されていないということが障害になり，なかなか研究が進まなかった．標数正の体上での特異点の研究は，特異点解消の定理ができてから発展するのだろう，と多くの人が思い込んでいた．ところがである，まだ正標数の特異点解消が解決しないままでどんどん研究が進んでしまったのである．しかも正標数特有の現象を用いてである．

標数 $p>0$ の体上の代数 R の写像，「**フロベニウス写像**」

$$F: R\to R,\quad f\mapsto f^p$$

を考えるとこれは環の準同型になる．これは正標数特有の現象である．そこで環論の専門家たちによって導入されたフロベニウス写像を用いる標数 p の環 R の特徴づけを使って多様体の特異点を以下のように定義する．

定義 4　簡単のため多様体 X は完全交叉多様体とする，つまりちょうど余次元分の個数の方程式で定義されているとする．多様体 X の点 x の近傍における正則関数全体を集めたもの R は局所環（すなわち極大イデアルがただ一つの環）になっている．特異点 (X,x) が F-純粋，F-正則であることを環 R の言葉で定義する：

標数 $p>0$ の環 R が **F-純粋**であるとは，フロベニウス射 $F:R\to R$ が加群として分裂することである．すなわち，逆向きの R 加群の準同型 $s:R\leftarrow R$ が存在して，$s\circ F=id_R$ となることである．R が **F-正則**であるとは，任意の $c\in R$ に対して $q=p^e$ が存在して

$$R\to R,\quad f\mapsto c\cdot f^q$$

が分裂することである．

一見してお分かりの通り，純粋に環論的な定義である．どこにも特異点解消などの情報は出て来ない．ところが驚くべきことに，こうやって定義した F-純粋，F-正則の概念が標数 0 の特異点解消を使って定義された標準特異点，対数的標準特異点と対応がつくのである．

これは「**正標数帰着**」を用いて対応づけられる．正標数帰着とは多様体 X が標数 0 の体 k 上で例えば $x^2+y^2+z^2+w^2=0$ で k^4 内で定義されていたとする．このとき X はこの方程式を満たす点 (x,y,z,w) の集合であるが，この各座標に入るのが体 k の元であった．ここで k の元の代わりに，標数 p の体 k_p の元を入れた多様体 X_p を X の**標数 p 帰着**と呼ぶ．X と X_p の間には次のような関係がある．

定理 5（原，渡辺，スミス，メータ，シュリニバス）X を標数 0 上定義された完全交叉多様体とするとき次が成立する．

*1)　ここで，弧は無限の長さを持つ級数であるがこれを m 次のところでちょん切ったものが m ジェットである．この m ジェット全体も多様体の構造を持つ．これをジェットスキームと呼ぶ．

1.　十分大きな素数 p に対して X_p が F-純粋特異点を持つとき X は対数的標準特異点を持つ．
2.　十分大きな素数 p に対して X_p が F-正則特異点を持つことと X が標準特異点を持つことは同値である．

以上の定理は，完全交叉というかなり限定的な条件の下で記述したが，もっと一般的な条件のもとでも成立している．ただ，この方向の研究は，今まさに発展途上で条件などを正確に記述していると煩雑になるので，このようにしたものである．

6. 終りに

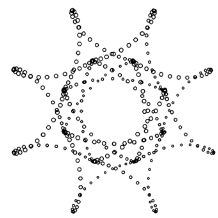
振り返ってみると『特異点入門』を書いた時点でこのような発展があろうとは全く想像できなかった．うれしい「想定外」である．こうなると，今後も今の時点での想像をはるかに超えた方向へ発展していくに違いないという気がする．楽しみである．なお，この本は出た時点では特異点に関する最新の情報を提供するものであったが，今となっては，特異点を勉強するために知っておかなければならない基礎的な情報を提供するものと，役割が変わった．冒頭に挙げた 3 つの項目について，最近の発展に重心を置いた勉強をしたい人は (1) に関しては適当な解説書が見当たらなかったので論文[1)]を見られたい．(2) に関する解説書として文献 2,5) を，(3) に関しては文献 6) をお勧めする．

参考文献

1)　Birkar, C. & Cascini, P.& Hacon, C. & McKernan, J., Existence of minimal models for varieties of log general type, *J. AMS*, **23** (2010) 405–468.
2)　Ein, L. & Mustaţă, M., Jet schemes and singularities, in Algebraic Geometry–Seattle 2005, Part 2, *Proc. Sympos. Pure Math.* **80**, Part 2, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, (2009) 505–546.
3)　Hironaka, H., Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II. *Ann. Math.* **79**, (1), (2) (1964), 109–326.
4)　石井志保子，『特異点入門』，シュプリンガー現代数学シリーズ，丸善出版．
5)　Ishii, S. Jet schemes, arc spaces and the Nash problem, *C.R. Math. Rep. Acad. Canada*, **29** (2007), 1–21.
6)　高木俊輔 & 渡辺敬一，「F 特異点」，論説，日本数学会機関誌「数学」掲載予定.

（いしい・しほこ，東京大学大学院数理科学研究科）

アインシュタインが取り入れたリーマン幾何学の発想



安井 幸則

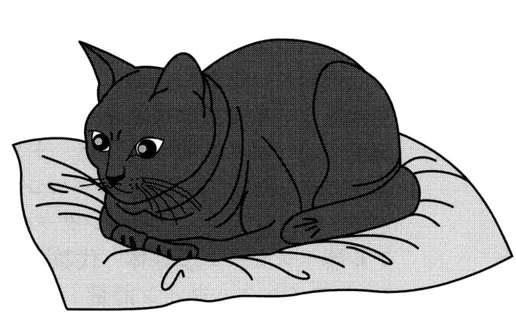
1. はじめに

一般相対論で取り扱う空間はどのようなものであろうか．それは日常感じる「たて」,「よこ」,「たかさ」のある3次元ユークリッド空間を一般化した空間であって，微分や積分が意味を持つ4次元時空である．ニュートンの理論では時間と空間は別ものであった．空間は3次元，それとは独立に1次元の時間があり，互いに入り混じることは決してない．アインシュタインはこれが正しくないことを明らかにした．バニッシュ・ホフマンは4次元時空をチーズにたとえている．どれも同じチーズではあるが，それをスライスする方法はいろいろある．スライスの仕方が時間と空間の決め方に対応しているのである．一般相対論のもう一つの大きな特徴は，重力を「力」ではなく時空の「歪み」として解釈したことである．地球が太陽の周りを回るのは，万有引力によって太陽に引き寄せられるからではない．太陽の重さによって歪んだ時空中を地球はまっすぐ進んでいる，ということになる．このような歪みを定める方程式がアインシュタイン方程式である：

$$Ric(g) - \frac{1}{2}s\, g = T\ .$$

左辺は時空の歪み具合，右辺は物質のエネルギーや運動量を表し，方程式は両者が等しいことを要求する．仮に，時空 ⇒「座布団」，物質 ⇒「黒ネコ」と思えば，アインシュタイン方程式は黒ネコの体重で座布団がどのようにへこむかを教えてくれる．座布団のへこみが時空の歪みに対応する．こうして，T が大きくなるほど（黒ネコが重くなるほど）時空の歪みも大きくなることがわかる．

リーマン幾何学は，4次元時空の歪みを記述する数学的な舞台を設定する．そこでの主役は計量と呼ばれる2階の対称テンソル場であり，計量を使って時空上の2点間の距離や角の大きさを計ることができる．アインシュタイン方程式に含まれる記号 g は，この計量のことである．計量は重力を表現する幾何学的な対応物なのである．さらに，計量の曲率という概念が導入され，時空の歪みを定量的に扱うことが可能になる．実際，歪んだ時空上でベクトルを閉曲線に沿ってぐるっと一周平行移動すると，ベクトルの方向が変化する．そのズレが曲率に他ならない．数式処理プログラム「Mathematica」を使えば，計量 g を入力するだけで，その曲率を簡単に計算することができる*1)．私が研究で初めて使ったのは，10年くらい前にな



座布団にすわる黒ネコ．

るが，それ以来電卓のように使えるMathematicaは必需品になった．もちろん，適当に計量を入力しても時空の歪みは物質のエネルギーとバランスしないので，絶妙なコントロールが必要になる．カー解はアインシュタイン方程式の解の中で最も大切な解の一つである．幾何学的にはリッチ平坦なローレンツ計量であり，物理的には回転するブラックホール時空を記述する．イズラエル，カーター，ロビンソン，ホーキングの研究が一緒になって証明された無毛定理によると，カー解はリッチ平坦な唯一の定常的なブラックホール解である．また，黒ネコで表現するなら「黒ネコの重みで座布団がへこみすぎて身動きできない状態」とでも言おうか．回転はどうすると反論されそうであるが，これ以上ネコには深入りしない．

■ 2. カー時空の対称性 ■

カー解を表示する便利な方法は，ボイヤー–リンキスト座標と呼ばれる極座標を使うことである．このときカー時空上の測地線方程式，クライン–ゴードン方程式，ディラック方程式等々の場の方程式が変数分離するという不思議な性質がある．方程式が変数分離するには何か理由があるに違いない．通常は計量の対称性から理解できると期待する．しかしながら，カー解の場合そのような対称性が不足していて説明できない．ウォーカーとペンローズは，カー時空にキリング–矢野テンソル場と呼ばれる反対称テンソル場が存在することを発見した．キリング–矢野テンソル場は，キリングベクトル場を高階のテンソル場に拡張したものである．しかしながら，計量の対称性ではないためカー時空の隠れた対称性とも呼ばれている．ベネンチによって証明された変数分離条件とキリング–矢野テンソル場を組み合わせることで測地線方程式の変数分離性が示される[1]．クライン–ゴードン方程式やディラック方程式に対しても，キリング–矢野テンソル場の存在は変数分離性の幾何学的な根拠を与える．カー時空上では，これ以外に，電磁気力のマックスウェル方程式や計量の摂動方程式に対しても変数分離性が現れる．しかしながら，これらに対する明白な説明は現在知られていない．

カー時空以外にキリング–矢野テンソル場の住む時空はあるのだろうか？ このような時空には，隠れた対称性を通してカー時空との意外な共通点が見つかるかもしれない．幾何学の分野で古くから知られている例に佐々木多様体がある．近年，超弦理論のAdS/CFT対応と呼ばれる予想の中で注目されている空間である[2]．高次元のカー時空から，ウィック回転と呼ばれる解析接続を使って，新しいタイプの佐々木多様体が構成された[3,4]．また，佐々木多様体に加え，弱いケーラー多様体，弱い G_2 多様体等々，錐空間が特殊ホロノミー群を許すコンパクトなリーマン多様体にもキリング–矢野テンソル場が存在する[5]．キリング–矢野テンソル場の住む時空は，超弦理論の時空とも相性がよいようだ．今後，より深いところでカー時空との関連性が発見されることを願って終わりにしたい．

*1) 曲率にもいろいろな種類がある．リーマン曲率，リッチ曲率，スカラー曲率等々．アインシュタイン方程式に現れる曲率はリッチおよびスカラー曲率で，本稿では $Ric(g), s$ という記号を用いた．

参考文献

1) B. Benenti, "Separation of Variables in the Geodesic Hamilton-Jacobi Equation", Symplectic Geometry and Mathematical Physics, Birkhäuser, 1991, 1–36.
2) 「数理科学」2011年4月号特集：「物理学と多様体—幾何学構造がもたらす物理学の理解」.
3) J.P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and D. Waldram, "Sasaki-Einstein Metrics on $S^2 \times S^3$", *Adv. Theor. Math. Phys.* **8** (2004), 711–734.
4) M. Cvetic, H. Lü, Don.N. Page and C.N. Pope, "New Einstein-Sasaki Spaces in Five and Higher Dimensions", *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005),071101.
5) U. Semmelmann, "Conformal Killing forms on Riemannian manifolds", *Math. Z.* **243** (2003), 503–527.

（やすい・ゆきのり，大阪市立大学大学院理学研究科）

非可換幾何学の考え方



佐古　彰史

1. 非可換幾何とは？

非可換幾何学とは何だろうか．「非可換」と「幾何学」に分解して考えてみる．

「**幾何学**」とは何であろうか．例えば小中学校以来なじみがあるのはユークリッド幾何学であるが，ユークリッド幾何学とは何であろうか．ユークリッド幾何学の公理系を読んだことがある人は，なんて複雑な公理で，何もないところからこのような公理を思いつくのは至難の業と感じたのではないだろうか．例えば，有名な平行線の公理である「一つの直線 l と，その直線上にない１点を与えたとき，その点を通る直線で直線 l と平行な直線（l と共有点を持たない直線）は１本だけ存在する」という公理はなぜ思いついたのであろうか．我々の住む世界をよく**観測**し，鉄道のレールの如き平行線を観察して得られたのであろう．実際に我々の住む世界はかなり高い近似でユークリッド空間として扱うことができる．三角形を適当に作図し分度器で内角の和を求めてみると，疑いようもなく 180 度になっていると感じられる．このように我々の周りの空間や図形を観察し，得られた結果を抽象化し形式化したものがユークリッド幾何学である．また，ユークリッド幾何学の中に座標を取り入れる，あるいは直線を隙間のない点の集合としてとらえるには，実数の概念を幾何学に取り込むことになる．そうすると，ユークリッド空間内の直線，円，放物線などを座標の関数で表すことができ，代数や関数の概念と幾何学の関係が現れる．球面やトーラスなどの幾何学的な対象を，関数を用いて解析したいとき，関数について詳しくわかっているユークリッド空間との対応があると便利となる．こうして幾何学的な対象をユークリッド空間の貼りあわせで表すというアイディアが出てきて，**多様体**という概念が生まれる．このように，様々な観察される事象を形式化し，徐々に構造を入れて代数や解析との関係が複雑になりながら，空間に関する論理体系として発展してきたものが幾何学である．

では「**非可換**」とは何であろうか．可換とは順序を入れかえてもいいもので，非可換とはその否定なので順序を入れ換えると何かがおかしくなることだ．例えば，日常生活で考えてみる．「歯磨き」をしてから「入浴」しても，「入浴」してから「歯磨き」をしても大差ないので「入浴」と「歯磨き」は可換であろう．しかし「脱衣」してから「入浴」するのは誰も困らないであろうが，「入浴」してから「脱衣」すると，入浴中にずっと服を着ているわけだから気持ちが悪いことこの上ない．つまり「脱衣」と「入浴」は非可換であろう．このようなものとしてとりあえず，非可換を理解しておく．

非可換幾何学とは，通常は可換と考えてきた「幾何学的な何か」が非可換だったらどうだろうかという視点で作られる幾何学である．ここでは，あえてもったいをつけて「何か」と書いている．以下では，徐々にその「何か」を明らかにしていく．

2. ユークリッドではない幾何学

前節で，我々の住む世界の幾何学が「ユークリッド幾何学である」と書かずに「高い近似でユークリッド幾何」と書いたのには理由がある．ご存知の読者が多いと思われるが，**一般相対性理論**によると，実際には**アインシュタイン方程式**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$$

という物質のエネルギーと運動量の分布に対応して与

えられる偏微分方程式の解として得られる**リーマン計量**を持つ，**リーマン幾何学**（厳密には偽リーマン幾何学）で記述されている．大雑把には右辺の物質のエネルギーに応じて，左辺の空間の曲がり具合が決まるという方程式である．ノートの上で三角形の内角を分度器で測る程度の身の周りの幾何ではユークリッド幾何学で事足りているのであるが，高い精度が必要な測量を行うとユークリッド幾何学から誤差が出てくるのだ．ここで，リーマン幾何学に立ち入る余裕はないのであるが，例えばリーマン幾何学では三角形の内角の和が180度とは限らない．カーナビなどで用いられているGPSは複数の人工衛星との三角測量で位置を求めているのであるが，ユークリッド幾何学を適応したのでは位置が正確に求まらず，地球の質量によって空間（より正確には時間も含めた時空）が曲がっているリーマン幾何学を用いることで正確な位置を割り出している．つまり，カーナビを使うことで常日頃，自分たちの空間の幾何学がユークリッド幾何学ではなくリーマン幾何学であることを確認していることになる．幸か不幸か，地球の重力が人間の日常的な幾何学的活動に比べて十分弱いことから，歴史的には平坦な空間を記述するユークリッド幾何学が先に完成したが，重力が強く空間が曲がっていることが当り前の星に人類が生まれていたのならリーマン幾何学が先に誕生していたのかもしれない．観測と幾何学が密接な関係を持っていることはこの例からわかっていただけるであろう．

ところで，相対性理論とともに人類の世界観を大きく変えた物理理論が20世紀にもう一つ誕生した．それが，**量子力学**である．量子力学の本質も「観測」と密接に関わっている．普段，プロ野球のテレビ中継などでピッチャーが投げた球がテレビに映り瞬時に球速も表示される．ストライクになるはずの投球が，スピードガンで球速を測るとボールになるようなことがないので，安心してスピードガンで測っているのである．つまり，球速の測定を位置の測定の前に行っても結果が変わらないということだ．速度に質量をかけたものを**運動量**と呼ぶが，以下では速度の測定と運動量の測定を同じものと扱う．そうすると，「運動量 p」と「位置 x」の測定が可換であると言い換えていいだろう．これを

$$[x,p] := xp - px = 0$$

と表そう．しかし，これは当り前のことではない．ミクロの世界では，成り立たないのである．例えば電子

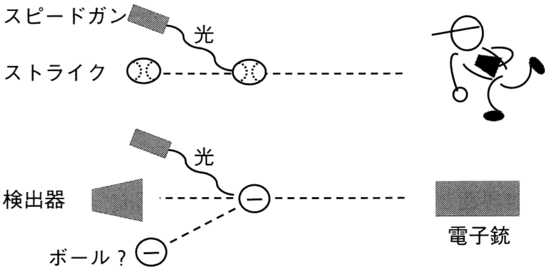


図1　上は野球．下は電子．測定が結果を変える．

の位置を測定するために光をあてて電子を観察する．そうすると，光から運動量をもらって電子の運動量が変化してしまう．つまり

$$[x,p] := xp - px \neq 0$$

になるのだ（図1）．簡単のため1次元の直線上を運動する点粒子を考える．このような粒子の力学は点の位置 x と運動量 p の作る**相空間**で考えると野球のボールに対する相空間 x–p 平面は通常の2次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ と考えてよいが，電子の相空間 x–p 平面は横軸 x と縦軸 p の座標の関数 xp は px と異なると考えなくてはならない．

このようなことは相空間という我々の住む空間ではない空間の話であって，我々の住む空間はあくまでも局所的にはユークリッド空間として扱えるリーマン多様体の可換な世界だから，非可換幾何だったり非可換空間などは，便宜的な数学上の道具に過ぎないと安心している読者がいるかもしれない．ところが，さらにミクロな世界を覗いてみると，そうも言ってられないかもしれない状況があるのだ．

3. 弦理論と非可換幾何

前の節で登場した重力を記述する理論である一般相対性理論と，ミクロの世界で物質の運動を記述する量子力学の世界を統合することを考える．ミクロな世界では粒子は軽くて重力なんて無いに等しいと思われるかもしれないが，ブラックホールやビッグバンのようなところでは重力が強いので影響は無視できないし，そもそも先ほど見たアインシュタイン方程式の右辺がミクロな世界では量子力学で記述される物質なのだから，左辺の空間の曲がり具合を表す重力も量子化されないといけないわけである．ところが，重力の量子化は発散の困難が付きまとっていて，通常の方法ではう

まくいかない．現在までに知られている重力の量子論の候補として最も優れている理論は，力を伝達するものや物質が粒子ではなくゴムひものような弦でできていると考える**弦理論**である．弦理論では弦が D 次元時空を移動してできる軌跡である 2 次元の曲面（これを**世界面**と呼ぶ）の面積 $S=\frac{1}{\lambda^2}\int_M \sqrt{g}d\xi^2$ が最小となるように運動する．ただし埋め込まれた 2 次元の曲面である世界面の座標を ξ^i $(i=1,2)$ とし，g は時空のリーマン計量から誘導される世界面上の計量 g_{ij} の行列式である．この作用とある条件のもとで等価なものがポリャコフ作用という以下の作用積分である．

$$S=\frac{1}{\lambda^2}\int_M \sqrt{g}g^{ij}\partial_i X_\mu \partial_j X^\mu d\xi^2.$$

世界面を時空に埋め込むという見方をすると，世界面上の点の D 次元時空内の位置座標を表す X^μ と補助的な場 g_{ij}（g^{ij} は g_{ij} の逆行列）の理論になっている．またこの記事では 2 度同じ添え字が現れたら（今の場合 μ, i, j）和をとるアインシュタインの縮約記法を採用している．弦理論の摂動的な量子論ではこの S を用いた，おおよそ正規分布の分布関数 $\exp(-S)$ を用いて期待値を計算する．

弦理論が正しい物理理論ならば，我々が住む時空が不確定で非可換であるということが示唆される．正確な議論は原論文[1)]を見てもらうとして，この事実は大雑把には次のような議論から得られる．世界面の計量を平坦に，つまり $g_{ij}=\delta_{ij}$ と選ぶ．世界面を記述する 2 つのパラメータを ξ_1, ξ_2 $(0\leq\xi_1\leq a, 0\leq\xi_2\leq b)$ とし，世界面の配位 $X^\mu(\xi_1,\xi_2)$ としてディリクレ境界条件

$$X^\mu(0,\xi_2)=X^\mu(a,\xi_2)=\frac{\delta^{\mu 2}B\xi_2}{b},$$
$$X^\mu(\xi_1,0)=X^\mu(\xi_1,b)=\frac{\delta^{\mu 1}A\xi_1}{a}$$

を課したもの，すなわち図 2 のような長方形の境界のある面を考える．これを上の S に代入すると

$$-\frac{1}{\lambda^2}\left(\left(\frac{B}{b}\right)^2+\left(\frac{A}{a}\right)^2\right)\times ab$$

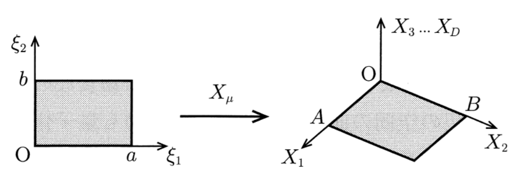


図 2　右が世界面．長方形の境界条件がついている．

となるので $\exp(-S)$ の中に

$$\exp\left(-\frac{1}{\lambda^2}\left(A^2\left(\frac{b}{a}\right)+B^2\left(\frac{b}{a}\right)\right)\right)$$

という項が出てくる．これを分布関数として A と B の分散を求めると

$$(\Delta A)^2\sim\lambda^2\frac{a}{b},\quad (\Delta B)^2\sim\lambda^2\frac{b}{a}$$

となる．したがって，

$$\Delta A\Delta B\sim\lambda^2$$

が得られる．これは時空のある領域の縦と横の長さに対する**不確定性関係**が得られたことを意味する．

量子力学での不確定性原理と**交換子積**との関係をここで思い出しておこう．A の期待値を $\langle A\rangle$ と書くことにすると，シュヴァルツの不等式より $(\Delta A)^2(\Delta B)^2\geq\left|(A-\langle A\rangle)(B-\langle B\rangle)\right|^2$ となる．ただし $|f|^2$ は期待値の 2 乗とした．ここで $c=(A-\langle A\rangle), d=(B-\langle B\rangle)$ とすると，$cd=(cd-dc)/2+(cd+dc)/2$ であるから

$$\begin{aligned}(\Delta A)^2(\Delta B)^2 &\geq |cd-dc|^2/4+|cd+dc|^2/4\\ &\geq |cd-dc|^2/4=\frac{1}{4}|[A,B]|^2\end{aligned}$$

となる．つまり，上の不確定性関係は A と B が非可換であることを示唆するのだ．A と B は我々の住む世界の空間の 2 つの座標であるから，我々の住む世界が非可換な幾何学で作られていることを示唆しているとも言える．そうなると，非可換幾何とは単に数学者の遊び道具なのではなく，我々の住む世界そのものの本質をとらえているかもしれない．

そして，最初の節の疑問であった「何かを非可換にする幾何学」の「何か」としては，一つは「座標」を考えるのである．しかし，座標を非可換にする幾何とは何であろうか？ いったいどういう幾何をどのように作ればいいのであろうか？

4. 空間と関数の環の関係

では，実際に非可換な空間を作る際にどのように作ればいいか考えてみたいのであるが，その理解の助けになる，空間と関数の集合の関係について考えてみる．そのため，この節では Pursell と Shanks による次の定理

定理 1 (Pursell–Shanks)．C^∞ 級多様体上でコンパクト台を持つ接ベクトル場のリー代数が C^∞ 級

多様体を決定し，同型のリー代数を持つ2つの多様体は可微分同相である．

を詳しく噛み砕いて見てみよう[2)]．X を n 次元 C^∞ 級多様体，つまり n 個の座標で点の位置を決めることができ近づいてみると $\mathbb{R}^n$ に見える滑らかな図形とする．D を $\mathbb{R}$ に値をとる C^∞ 級関数の全体の集合で，$f, g \in D$ に対し和 $f+g$，積 fg で閉じていて定数倍でも閉じているものとする．閉じているというのは演算してもまた同じ集合に属すということで，今の場合 C^∞ 級関数どうしを足してもかけてもまた C^∞ 級関数なので閉じているのだ．このように，和と積が定義されて，その演算で閉じているものを環と呼ぶので，このような環の構造を持つ関数の集合を**関数環**という．D の部分環 D_0 を，D の中でコンパクト台を持つ関数の全体として定義する．接ベクトル場 L を $D \to D$ の線形微分作用素，すなわち $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $L(af+bg) = aL(f)+bL(g)$ と $L(fg) = f\,L(g) + g\,L(f)$ を満たすものとする．接ベクトル場の全体を $\mathcal{L}$ とすると，L の定数倍 aL も $L_1 + L_2$（ただし $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$）も $\mathcal{L}$ に含まれる．さらに交換子積 $[L_1, L_2] := L_1L_2 - L_2L_1$ という積を考えると，これに対しても閉じていることがわかる．つまり $\mathcal{L}$ もまた環になっているのである．大雑把に言えば交換子積を積として定義することで環になるものを**リー代数**と呼ぶので，この $\mathcal{L}$ はリー代数である．ただ，この $\mathcal{L}$ と上の定理の中のリー代数は少し異なるのでさらに話が複雑になっていく．X の点 x の近傍で座標関数が $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ であるものを考え，その開部分集合 U を C^∞ 級関数 $g_1, g_2, \ldots, g_n \in D$ が $g_i|_U = f_i$ であるように選ぶ．そうすると L の局所表示が $L(f) = L(g_i)\dfrac{\partial f}{\partial g_i}$ と書ける．次に $\mathcal{L}_0$ を $\mathcal{L}$ の部分代数でコンパクト台を持つベクトル場の全体とする．このとき以下の補題が成り立つ．

補題 1. $I \neq \mathcal{L}_0$ が $\mathcal{L}_0$ の空でないイデアルであるとすると，I のすべての元のすべての成分が 0 となる点 $x \in X$ が存在する．

証明は背理法で以下のように行う．任意の $x \in X$ でベクトルの成分 $L(g_i) = \lambda_i$ がすべて 0 となることがないようなベクトル場 $L \in I$ があるとする．その方向に接する曲線と，その直交方向に局所座標 $(h_1, \ldots, h_n)$ を

$$\nu_k := L(h_k) = 1, \quad \nu_i := L(h_i) = 0 \quad (i \neq k)$$

と取り直せるだろうか．任意の関数 f に対して

$$L(f) = L(g_i)\frac{\partial f}{\partial g_i} = L(h_i)\frac{\partial f}{\partial h_i},$$

つまり

$$\lambda_i \frac{\partial h_j}{\partial g_j}\frac{\partial f}{\partial h_j} = \nu_i \frac{\partial f}{\partial h_i} = \frac{\partial f}{\partial h_k},$$

$$(\lambda_i) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial h_j}\right)(\nu_i) \Rightarrow \lambda_i = \frac{dg_i}{dh_k}$$

である座標を選べばよい．積分して

$$h_k = \sum_i \left\{ \int \frac{dg_i}{\lambda_i} + c_i \right\}.$$

ただし c_i は g_i には依存しない関数で，座標が存在するよう（あるいは先ほど使った逆行列 $\left(\dfrac{\partial h_k}{\partial g_i}\right)$ が存在するよう）Jacobi 行列式が 0 にならないように選ぶ．λ_i がすべて 0 にはならなかったので，この座標は X 全体で定義できることになる．この座標でのベクトル場の成分 ν_k を k 方向局所単位ベクトルと呼ぶ．

次に $L, M \in \mathcal{L}$ を

$$L = \lambda_i \frac{\partial}{\partial g_i}, \quad M = \mu_i \frac{\partial}{\partial g_i}$$

とし，λ_i を 1 方向局所単位ベクトル（つまり $\lambda_1 = 1, \lambda_i = 0\ (i \neq 1)$）となる座標 g_i を選ぶ．すると

$$[L, M]_j = \lambda_i \frac{\partial \mu_j}{\partial g_i} - \mu_i \frac{\partial \lambda_j}{\partial g_i} = \frac{\partial \mu_j}{\partial g_1}$$

となるが，この近傍で $\dfrac{\partial \mu_j}{\partial g_1}$ が任意の関数になるように μ_j を選ぶことは可能である．つまり，少なくとも局所的には $\mathcal{L}$ の任意のベクトル場の成分を $[L, M]$ と I に属するベクトル場の成分で表すことができるのである．

次にこの結果を使い，$\mathcal{L}_0$ について調べるのだが，紙数の都合細かいことは省略する．$L \in \mathcal{L}_0$ とし，D_0 の台を開近傍 V_i で覆い，各 V_i で分割した L を L_i とする．ある $M_i \in I$ を，V_i に含まれるコンパクトな台のもと k 方向局所単位ベクトルであるようなものとする．上の議論から $L_i = [M_i, N_i]$ であるような N_i が存在する．このことから，$L = \sum_i [M_i, N_i] \in I$ となる．つまり任意の $L \in \mathcal{L}_0$ が $L \in I$ となり $\mathcal{L}_0 = I$ という矛盾が導けたことになる．□

さてこの補題を用いて，以下の補題を示そう．

補題 2. $I \neq \mathcal{L}_0$ が空でないイデアルとし，x が I のすべてのベクトル場のすべての成分が 0 となる点であるとする．$L \in I$ の成分 $\lambda_i = L(g_i)$ としたと

き，任意の λ_j の微分が x で 0，つまり $\left.\frac{\partial\lambda_j}{\partial g_i}\right|_x = 0$.

これも背理法で示す．$\left.\frac{\partial\lambda_j}{\partial g_k}\right|_x \neq 0$ であるものを仮定する．先ほど同様，k 方向局所単位ベクトルであるような M を考えると

$$[L, M]_j = \lambda_i \frac{\partial\mu_j}{\partial g_i} - \mu_i \frac{\partial\lambda_j}{\partial g_i} = -\frac{\partial\lambda_j}{\partial g_k}$$

なので $[L, M]$ は 0 でない．$L \in I$ であるから，$[L, M] \in I$ であるのに x で 0 でない成分を持つことになり補題 1 より矛盾である．□

こうして次の定理が得られる．

定理 2. $\mathcal{L}_0$ のそれぞれの極大イデアルは，ある $x \in X$ ですべての成分とその微分が 0 である $\mathcal{L}_0$ に含まれるベクトル場の全体からなる．

つまり，多様体 X と $\mathcal{L}_0$ の極大イデアルの全体からなる集合 X^* が 1 対 1 対応になっているのだ．さらに，詳細は述べないが，ストーントポロジーという位相を入れることで X と X^* が同相であることも言える．また，

定理 3. X と Y が滑らかな多様体で，コンパクト台を持つベクトル場のなすリー代数が同形なとき，X と Y が可微分同相である．

も得られる．こうしてこの節の冒頭の Pursell–Shanks の定理，すなわちある種のベクトル場のリー代数により多様体が決定されているという事実が得られるのだ．

詳しく述べることはしないが，このような関数の環と幾何学の対応を表す定理はいくつかのバリエーションがある．これらの事実は点の集合としての多様体と多様体の上に住んでいるベクトル場がある意味で等価であることを示しており，幾何学に対して面白い視点を提供している．「図形というのは，点の集合として見てもいいが，図形の上に乗っている関数の集まりと考えてもいいよ」と言っているのだ．実際のところ，我々が普段見ている図形というのは図形から反射した光を網膜がとらえたものである．今，読者が見ているこの雑誌のこのページの形も 3 次元空間に埋め込まれた 2 次元面の点集合として考えてもいいが，その曲面上で定義された電磁場というベクトル場が空間を伝わって来たものである光を見て曲面として認識しているわけであるから，そう考えるとこの定理も自然に思われるのではないだろうか．

5. 非可換幾何

ようやく非可換幾何をどうやって作るかという問いに答える準備ができた．図形それ自身をどうにかしてやるのではなく，座標やそれを用いて記述される関数 f と g の積 fg を非可換にすればよいのである．その非可換な積を以下では **$*$ 積**と呼び $f * g$ と書くことにしよう．つまり $f * g \neq g * f$ としたいのである．

簡単のため 2 次元ユークリッド平面を非可換にしてみる．xy 座標に対して

$$[x, y]_* := x * y - y * x = i\hbar \qquad (1)$$

という**交換関係**を要請しよう．ただし i は虚数単位とし，$\hbar$ は非可換であることを表す定数で，$\hbar = 0$ は可換であることを表す．また，積が行列の積のように非可換になると，計算が難しくなるので，せめて積の**結合則**が成立していれば行列と同程度の計算はできそうであるから，$(f * g) * h = f * (g * h)$ という結合則は要請することにしよう．つまり非可換であるが結合的な関数環を考える．そのような $*$ 積はどのように作れるであろうか．そのような $f(x, y) * g(x, y)$ は以下のように定義することで得られる．

$$f * g = f(x, y)\ \exp\left\{\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x}\right)\right\}\ g(x, y). \qquad (2)$$

ただし，$\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}$ は左にある関数を，$\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y}$ は右にある関数を微分することを表す．つまり，

$$f\ \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y}\right)\ g = \frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial g}{\partial y}$$

である．この $*$ 積を**モイヤル積**と呼ぶ．この定義を用いると交換関係 (1) が得られることは直ちにわかるであろう．一方，結合則が成立することは，フーリエ積分

$$f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2$$

を用いるとわかる．$f * g$ をそれぞれのフーリエ変換 F, G を用いて表すと

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)G(\beta)e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y) + i(\beta_1 x + \beta_2 y)}$$
$$\times \exp\left\{-\frac{i\hbar}{2}\left(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1\right)\right\} d\alpha_1 d\alpha_2 d\beta_1 d\beta_2$$

である．さらに $(f * g) * h$ を h のフーリエ変換 H で表してやると

$$
\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)G(\beta)H(\gamma)
\times e^{i(\alpha_1 x+\alpha_2 y)+i(\beta_1 x+\beta_2 y)+i(\gamma_1 x+\gamma_2 y)}
\times \exp\left\{-\frac{i\hbar}{2}\left((\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)+(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)\right)\right\}
d\alpha_1\cdots d\gamma_2
$$

であるから，$f*(g*h)$ と同じであることが示された．このように，関数の積を $*$ 積であると考えると非可換な結合的関数環を構成することができたことになり，もちろん座標どうしの積が非可換で (1) となっている．前節で示された，図形や空間とはその上で定義された関数環と同じであるという思想を受け入れると，これは「非可換な平面」を構成したことに他ならないと考えるのである．

詳しい話は参考文献に譲るとして上のような方法で $\hbar$ の形式冪級数で書かれる関数に $*$ 積を定義して非可換空間を構成する方法は**変形量子化**と呼ばれている[3]．例えば，任意のポアソン多様体に対して変形量子化を与えることが可能であることが示されている．ただし，$*$ 積が存在することが示されてはいるが，(2) のように具体的に $*$ を書ける多様体は対称性が高いものに限られている．

また，非可換幾何の実現方法は変形量子化以外にも様々である．例えば，量子力学で座標および運動量を作用素として扱うことで，非可換性を理論に取り込んだように，**作用素環**の幾何学を考えることで非可換幾何を実現することができる．Gel'fand の定理により可換な C^* 環がやはり位相空間を決定するので，これを非可換な C^* 環にしたものが非可換幾何であるという考え方である．これは Connes が源流となっている非可換幾何の理論である[4,5]．他にもファジーな空間なども ある種の非可換幾何の表現と言える．

非可換幾何学は非常に若い幾何学であり，どのような考え方がより豊かな非可換幾何学を生み出すかはわからない．リーマン幾何学が一般相対性理論と結びつくことでその重要性が増したように，我々の住む宇宙空間がどういった非可換幾何学と結びつくかがわかるとそれに注目が集まるのであろうが，現実の我々の住む時空が非可換時空であったとして，どのように構成されるべきなのかはまだわかっていない．しかし幾つかの兆候は見え隠れしている．例えば近年，弦理論の構成的な定式化の候補であるタイプ II 行列模型において大きく進展しているようだ[6]．タイプ II 行列模型は時空が無限次元の行列の固有値の分布で生成されると解釈できる物理理論で，時空座標のもととなる量が行列で表されるという意味で一種の非可換幾何とみなすことができる．その模型では空間がダイナミカルに生成される様子が大規模な数値計算を通して見えてきていると報告されている[7]．他にも様々あるこうした量子重力を含む統一理論へのアプローチは，いずれにしても新しい幾何学を要求しているようだ．非可換幾何学の考え方で，人類の宇宙観がまた変革することがあるかもしれない．

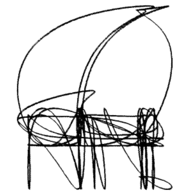
参考文献

1) T. Yoneya, "On the interpretation of minimal length in string theories", *Mod. Phys. Lett. A*, **04** (1989), 1587.
2) L.E. Pursell and M.E. Shanks, "The Lie algebra of a smooth manifold", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954), 468–472.
3) 前田吉昭，佐古彰史：『幾何学の量子化』（SGC ライブラリ 95），サイエンス社，2012.
4) 夏目利一，森吉仁志：「作用素環と幾何学」（数学メモアール 2），日本数学会，2001.
やや気軽な入門としては
河東泰之編：『数理物理への誘い 5』，遊星社，2005
夏目利一：5 話，非可換幾何学の不思議な世界，
綿村哲：6 話，非可換空間上のゲージ理論
などもある．
5) A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.
6) N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, "A large-N reduced model as superstring", *Nucl. Phys. B* **498** (1997), 467–491.
7) 西村淳："ローレンツ型 IIB 行列模型における宇宙膨張の数値的研究", 研究会「離散的手法による場と時空のダイナミクス」のスライド, http://www.jicfus.jp/jp/wp-content/uploads/2013/09/Nisihmura.pdf；S.-W. Kim, J. Nishimura and A. Tsuchiya, "Expanding (3+1)-dimensional universe from a Lorentzian matrix model for superstring theory in (9+1)-dimensions", *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 011601.

（さこ・あきふみ，東京理科大学理学部）

多様体の解析

リッチ・フローと幾何化予想の解決



塩谷　隆

1. はじめに

幾何学は図形を研究する学問であるが，専門的には図形のことを**空間**とよぶ．幾何学は（大雑把には）位相幾何学と微分幾何学に分かれるが，位相幾何学では空間の変形を許して大雑把な形を研究し，微分幾何学では空間の曲がり方の量である曲率などを手がかりに，精密な形を研究する．幾何学で研究する空間のうちで最も基本的なものが**多様体**である（本稿では，微分可能多様体とリーマン多様体を区別せず，すべて多様体とよぶことにする）．次元が 2 以下の多様体については，位相幾何学的にも微分幾何学的にもその全貌が既に詳しく分かっている．3 次元多様体の位相幾何学については，1904 年にポアンカレが有名な**ポアンカレ予想**を提案して以来，この予想を中心として多くの数学者により研究されてきた．1980 年代にサーストンが**幾何化予想**を提案した．これはポアンカレ予想を含む壮大な予想で，すべての 3 次元閉多様体を位相幾何学的に分類しようというものである．2002 年から 2003 年に渡って，ペレルマンは幾何化予想（ポアンカレ予想を含む）の証明を発表し，多くの数学者を驚かせた．その証明の手法は微分幾何学の一つの分野「幾何解析学」によるが，証明の一部には物理の弦理論のアイディアも使われている．その直後に幾つかの数学者のグループにより検証作業が開始され，2006 年にポアンカレ予想については正しいと確認された．それにより，アメリカの科学誌「サイエンス」で，2006 年の最も重要な科学的成果の第 1 位にポアンカレ予想の解決が選ばれた．また同年 8 月にこの功績に対してペレルマンにフィールズ賞が送られたが本人は辞退した，という話は覚えておられる方も多いと思う．2008 年には，ついに幾何化予想の証明すべてについて正しいことが確認された．

本稿では，2，3 次元多様体の位相幾何学と微分幾何学を概観し，幾何化予想とペレルマンによる証明の雰囲気を味わってもらうことを目的とする．

2. 2 次元多様体

2 次元多様体の例として，図 1 のような球面，トーラス（うきわ），平面，円板がある．球面を S^2，トーラスを T^2，平面を $\mathbb{R}^2$，円板を D^2 で表す．2 次元多様体は，局所的に円板と同じ形をしているものとして定義される．より詳しく言うと，M が 2 次元多様体とは，M の任意の点に対してそれを囲むようにうまく M を切り取ると円板と同相なものが得られるときをいう．ここで，2 つの図形が変形して互いに移り合うときに**同相**であるという（この辺りの定義は正確ではないので，ちゃんとした定義は専門書を参照されたい）．一般に，無限に伸びていなくて（専門用語ではコ

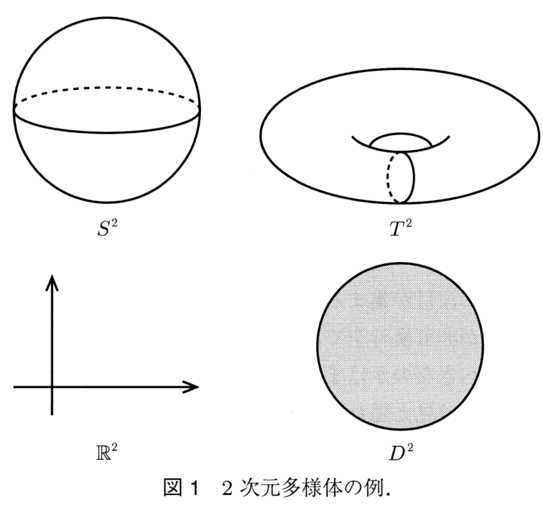


図 1　2 次元多様体の例．

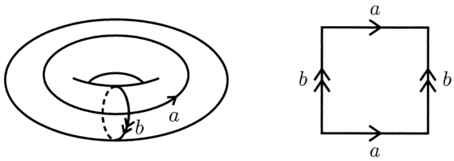


図 2　トーラスとその展開図.

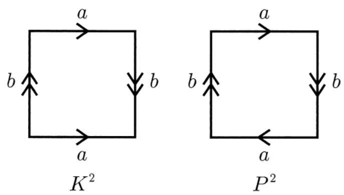


図 3　クラインの壷と射影平面.

ンパクト)，境界がないような多様体を**閉多様体**とよぶ．球面とトーラスは閉多様体であり，平面と円板は閉多様体ではない.

多様体は切り貼りすることで，詳しく調べたり，また新しい多様体を作ることもできる．例えば図 2 のように，トーラスを曲線 a と b で切り開いて変形すると四角形領域となる．逆に四角形領域の二組の向かい合った辺を貼り合わせることにより，トーラスが復元される．貼り合わせ方を変えることで，また別の 2 次元多様体が得られる．向かい合った辺の一組をトーラスと同じように，もう一組を向きを反対にして貼り合わせた 2 次元多様体を**クラインの壷**とよび K^2 で表す．二組の辺の両方をそれぞれ反対の向きに貼り合わせた 2 次元多様体を**射影平面**とよび P^2 で表す（図 3 を参照)．クラインの壷と射影平面は両方とも閉多様体である.

3. 2 次元多様体の分類

M, N を 2 つの 2 次元多様体とする．M から円板を取り除くと境界をもつ多様体となり，その境界は円である．N からも同様に円板を取り除くと境界に円が現れる．それらの境界どうしを貼り合わせるとまた 2 次元多様体が得られるが，それを M と N の**連結和**とよび，$M\#N$ で表す（図 4 を参照)．ここで，取り除く円板によってでき上がる連結和は異なるが，それらは互いに同相になっている．2 つの多様体 M, N が同相であることを，$M \cong N$ で表すこととする．3 つの 2 次元多様体 L, M, N に対して,

$$(L\#M)\#N \cong L\#(M\#N)$$

が成り立つので，これを L, M, N の連結和とよび,

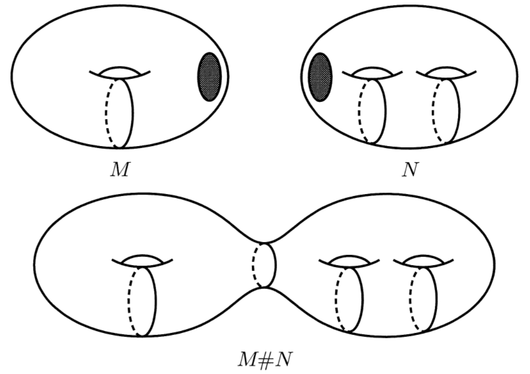


図 4　連結和.

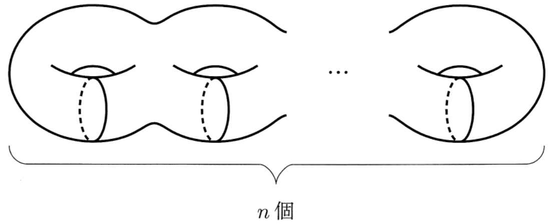


図 5　種数 n の曲面.

$L\#M\#N$ と表す．4 つ以上の場合も同様である．球面 S^2 との連結和については,

$$S^2\#M \cong M\#S^2 \cong M$$

が成り立つ．また

$$M\#N \cong N\#M$$

が成り立つ.

次の定理が知られている.

2 次元閉多様体の分類定理． 2 次元閉多様体は次のいずれかに同相である.

1. 球面.

2. n 個のトーラスの連結和（$n = 1, 2, 3, \ldots$).

3. n 個の射影平面の連結和（$n = 1, 2, 3, \ldots$).

上記 2 の 2 次元多様体を**種数 n の曲面**とよぶ（図 5 を参照).

それでは，K^2 や $T^2\#P^2$ はどこへ行ったのでだろうか？ 実は,

$$K^2 \cong P^2\#P^2, \quad T^2\#P^2 \cong P^2\#P^2\#P^2$$

が成り立つことが分かってるので，これらは上記定理の 2 に含まれている.

4. 高次元多様体

n 次元円板 D^n を以下で定義する.

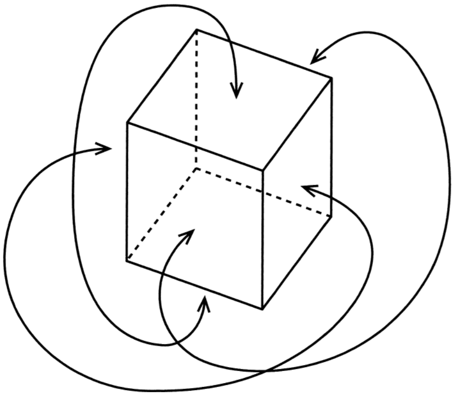


図 6　3 次元トーラス．

$$D^n := \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1 \right\}.$$

これは円板 D^2 の一般化であり，3 次元円板 D^3 は球体に他ならない．n 次元多様体も 2 次元多様体と同様に，局所的に n 次元円板と同相なものと定義される．つまり，M が n 次元多様体とは，M の任意の点に対して，それを囲むようにうまく M をくり抜くと n 次元円板 D^n と同相なものが得られるときを言う．例えば，以下のように定義される**半径 r の n 次元球面** $S^n(r)$ は n 次元閉多様体である．

$$S^n(r) := \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2 \right\}.$$

3 次元球面を切り貼りで実現することもできる．2 次元球面を赤道で 2 つに切り分けると，2 つの円板に同相なものが得られる．つまり逆に言うと，2 次元球面は 2 つの円板を境界で貼り合わせることにより得られる．3 次元球面についても同様で，3 次元円板 D^3，つまり球体を 2 つもってきて，それらを境界で貼り合わせたものとしても得られる．3 次元トーラス T^3 は正六面体（サイコロ）の相対する面どうしを貼り合わせることで得られる（図 6 を参照）．3 次元トーラスも 3 次元閉多様体である．

5. 曲率

曲率とは多様体の曲がり具合を表す量である．場所によって曲がり具合は異なるので，多様体の点に応じて決まる実数となる．すなわち多様体の上の実数に値を取る関数である．ここでは曲率の定義は述べず，例を示すことで曲率とはどんなものかを説明しよう．

最初に 2 次元多様体について曲率の例を見るが，2 次元多様体の曲率は**ガウス曲率**とよばれている．例えば，平らな平面（xyz 平面の xy 平面など）の曲率は至るところゼロである．放物面 $z = x^2 + y^2$（これは放物線 $y = x^2$ を z 軸のまわりに回転して得られた曲面である）の曲率は至るところ正である．放物面では原点 $\mathrm{O} = (0, 0, 0)$ において曲がり方が最も大きくなり，曲率が最大となる．半径 r の 2 次元球面 $S^2(r)$ では，どの部分を見ても同じ形をしているので，曲率は一定で正の値 $1/r^2$ をとる．馬の鞍のような形の 2 次元多様体 $z = -x^2 + y^2$ の曲率は負となる（図 7 を参照）．

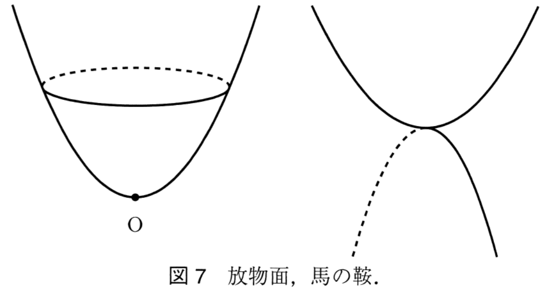


図 7　放物面，馬の鞍．

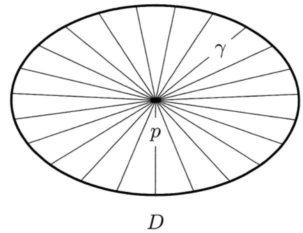


図 8　n 次元多様体の曲率．

$n \geq 3$ について，n 次元多様体の曲率はもう少し難しい．M の 2 点 p, q を結ぶ M の中の曲線 γ が**最短測地線**であるとは，p, q を結ぶ M の中の曲線たちのうちで，γ が最も短い長さをもつときを言う．例えば，半径 1 の 2 次元球面 $S^2(1)$ の長さ π 以下の大円弧[*1)]は最短測地線である．与えられた M の点 p に対して，最短測地線は p からあらゆる方向へ少なくともほんの少しだけは延ばせることが知られている．M の中の 2 次元円板 D で，p を含み p から出る最短測地線の束からなっているものを考える．D は点 p で尖っていないとする．このような D は p から離れる方向にはある意味でまっすぐになっている．しかし，一般には多様体 M 自体が曲がっているので，それと同じ分だけ D も曲がっている．D は 2 次元多様体であり，点 p における D のガウス曲率を，M の p における D に関する**断面曲率**とよぶ（正確には，断面曲

*1)　原点を通る平面と $S^2(1)$ との交わりを大円，その一部分を大円弧という．

率は p における接空間の2次元線形部分空間に対して決まる)．点 p を通る最短測地線 γ を一つ固定して，それを含む上のような D を動かしたときの平均値の $(n-1)$ 倍を**リッチ曲率**とよぶ(図8を参照)．2次元多様体については，ガウス曲率とリッチ曲率は一致する．

6. 定曲率空間

まず，多様体の完備性の概念を定義しよう．多様体の曲線 γ が**測地線**であるとは，γ 上の端点でない任意の点に対して，それを内部に含むような γ の部分弧があって，その部分弧が最短測地線となるときをいう．一般に，最短測地線は測地線だが，その逆は成り立たない．例えば，半径1の2次元球面 $S^2(1)$ の大円弧はすべて測地線である．しかし，長さが π を超えると最短測地線ではなくなる．任意の測地線がいくらでも両側に延ばすことのできるような多様体を**完備な多様体**とよぶ．一般に，閉多様体は完備な多様体であることが知られている．

断面曲率が至るところ一定であるような多様体を**定曲率空間**とよぶ．完備な定曲率空間は最も基本的な多様体である．例えば，半径 r の n 次元球面 $S^n(r)$ は完備な定曲率空間である．また，半径 r の2次元球面を赤道で切り離した半分を考える．その境界は半径 r の円だが，その対蹠する2点の組に沿ってをぐるっと一周貼り合わせると新しい閉多様体が得られる．これも定曲率空間であり，射影平面 P^2 と同相である．一般に，正の曲率 κ をもつ完備な n 次元定曲率空間は，半径 $1/\sqrt{\kappa}$ の n 次元球面 $S^n(1/\sqrt{\kappa})$ を切ったり貼ったりして得られることが知られている．専門用語を用いてより詳しく述べると，正の曲率をもつ完備な定曲率空間は，球面へ自由かつ等長的に作用する離散群による商空間として得られる．

平面 $\mathbb{R}^2$ は曲率がゼロの完備な定曲率空間である．長方形の対辺を貼り合わせて得られるトーラスも曲率ゼロの完備な定曲率空間となる．正曲率の場合と同様に，一般に曲率がゼロの完備な n 次元定曲率空間はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ を切ったり貼ったりして得られる．

それでは負の曲率をもつ完備な定曲率空間はどうであろうか？ 実は，(完備単連結) n 次元**双曲空間** $H^n(\kappa)$ $(\kappa<0)$ という多様体があり，それを切ったり貼ったりすることにより，任意の曲率が $\kappa(<0)$ の完備な定曲率空間が得られる．双曲空間 $H^n(\kappa)$ はユークリッド空間と同相であるが，ユークリッド空間と違って負に曲がった空間である．

$M^n(\kappa)$ を以下のように定める．

$$M^n(\kappa) := \begin{cases} S^n(1/\sqrt{\kappa}) & (\kappa>0), \\ \mathbb{R}^n & (\kappa=0), \\ H^n(\kappa) & (\kappa<0). \end{cases}$$

$M^n(\kappa)$ を切ったり貼ったりして得られるような多様体，より正確には，$M^n(\kappa)$ に自由かつ等長的に作用する離散群による商空間に同相な多様体は，$\kappa>0$ のとき**球面幾何をもつ**，$\kappa=0$ のとき**ユークリッド幾何をもつ**，$\kappa<0$ のとき**双曲幾何をもつ**という．

以上の言葉を用いて，先に述べたことを定理としてまとめておこう．

定曲率空間の幾何化定理． 曲率 κ の完備な n 次元定曲率空間は，$\kappa>0$ のとき球面幾何をもち，$\kappa=0$ のときユークリッド幾何をもち，$\kappa<0$ のとき双曲幾何をもつ．

2次元の場合には以下が知られている．

2次元閉多様体の幾何化定理． 2次元閉多様体は，球面幾何，ユークリッド幾何，双曲幾何のいずれかをもつ．

具体的には，球面 S^2 と射影平面 P^2 は球面幾何をもち，トーラス T^2 とクラインの壷 K^2 はユークリッド幾何をもち，その他は双曲幾何をもつ．

7. 幾何化予想

2次元閉多様体の分類定理・幾何化定理と同じようなことが3次元閉多様体についても成り立つ．これがサーストンの幾何化予想とよばれるものである．前節で紹介した球面幾何，ユークリッド幾何，双曲幾何に加えて，サーストンは以下の合計8つの幾何を考えた．

1. 球面幾何	**5.** $H^2\times\mathbb{R}$ 幾何
2. ユークリッド幾何	**6.** $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ 幾何
3. 双曲幾何	**7.** Nil 幾何
4. $S^2\times\mathbb{R}$ 幾何	**8.** Sol 幾何

前節で述べた，球面幾何，ユークリッド幾何，双曲幾何と同様に，3次元多様体 M が～幾何をもつということを，モデルとなる空間を離散群の自由な作用で割った商空間が M と同相となるときを言う．いろいろと未

定義用語が出てきたが，ここではその説明は省略する．

サーストンの幾何化予想（ペレルマン）． 任意の3次元閉多様体は，2次元球面または2次元トーラスで切り分けることにより，上記8つの幾何をもつ多様体に分かれる．

1節でも述べた通り，これはサーストンによって予想され，ペレルマンによって証明された．

専門用語を用いて補足すると，種数 n の曲面の自明な S^1 束は $H^2 \times \mathbb{R}$ 幾何をもち，自明でない S^1 束は $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$ 幾何をもつ．T^2 上の自明でない S^1 束は Nil 幾何をもつ．S^1 上の自明でない T^2 束は Sol, Nil またはユークリッド幾何をもつ．S^2 上の S^1 束は $S^2 \times \mathbb{R}$ またはユークリッド幾何をもつ．

幾何化予想の系として以下が従う．

楕円化予想（ペレルマン）． 基本群が有限な3次元閉多様体は球面幾何をもつ．

ポアンカレ予想（ペレルマン）． 基本群が自明な3次元閉多様体は球面に同相である．

8. リッチ・フロー

リッチ・フローとは以下のような微分方程式(R)を用いて多様体を変形する方法で，ハミルトンにより発見された．

$$\frac{d}{dt} g_{ij}(t) = -2R_{ij}(t). \qquad \text{(R)}$$

ここで，t は時刻のパラメータで，$g_{ij}(t)$ は**リーマン計量**とよばれ，多様体の形を規定する多様体上の関数である（n を多様体の次元としたとき，i, j はそれぞれ $1, 2, \ldots, n$ を動く）．$R_{ij}(t)$ は**リッチ曲率テンソル**というもので，5節で述べたリッチ曲率と本質的に同じものである．最初に多様体上にリーマン計量 $g_{ij}(0)$ があったときに，t が進むとそれにつれて多様体の形が変わっていく．その変わり方が上記リッチ・フローの微分方程式(R)によって規定されているのである（正確には，体積を一定に保つために正規化されたリッチ・フローを使う必要がある）．

ハミルトンは以下を証明した．

正リッチ曲率をもつ閉多様体の幾何化定理（ハミルトン）． リッチ曲率が至るところ正の3次元閉多様体は球面幾何をもつ．

この定理は以下のように証明される．リッチ曲率が正の3次元閉多様体をリッチ・フローで変形する．そうすると曲率の大きいところは小さくなり小さいところは大きくなっていって，ついには正曲率の定曲率空間が得られる（図9を参照）．定曲率空間の幾何化定理により，これは球面幾何をもつ．

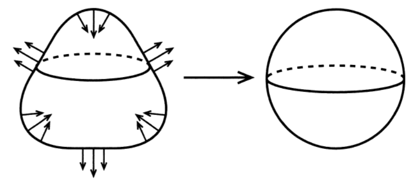


図9　ハミルトンの証明．

9. 幾何化予想の証明

ハミルトンはリッチ曲率が正の多様体のみを考えたが，そうでない一般のときはどうか？ うまく行けばポアンカレ予想や幾何化予想が解けるのでは？というのは自然な思いつきである．

任意に3次元閉多様体が与えられたとする．それをリッチ・フローにより変形していくと，多様体が部分的にくびれる現象が起こる．そこからさらに，リッチ・フローにより変形すると，そのくびれた部分がつぶれてしまい特異点が生じ，それ以上変形できなくなってしまう．実は，リッチ曲率が正のときは，このようなくびれ現象が起こらないことをハミルトンは証明したのである．そのくびれた部分で多様体を2つに切断する．それぞれの切断面にキャップをつけると2つの新しい多様体ができる．これらそれぞれについて，またリッチ・フローを考える．そしてまたくびれた部分ができれば，同じことを繰り返す．この手続きを**手術つきリッチ・フロー**とよぶ（図10を参照）．2つに分かれた多様体のどちらかがまたさらに2つに分かれたりするので，個数はどんどん増えることはあっても減ることはない．ハミルトンもここまでは考えたのだが，彼自身を含む多くの優秀な数学者の研究にも関わらず，「絵に描いた餅」で終わっていた．どこが問題だったかと言うと，単に手術つきリッチ・フローを進めていくだけでは，どこまでも止まらず無限に続いてしまう可能性もあり，どうなるか全く分からなかったのである．

ペレルマンがどうしたかを簡単に言うと，リッチ・フローによってくびれたところが特異点に漸近するにつれて，ある種のソリトン解（自己相似解）に近づくことを示した．その結果により，くびれたところを切断

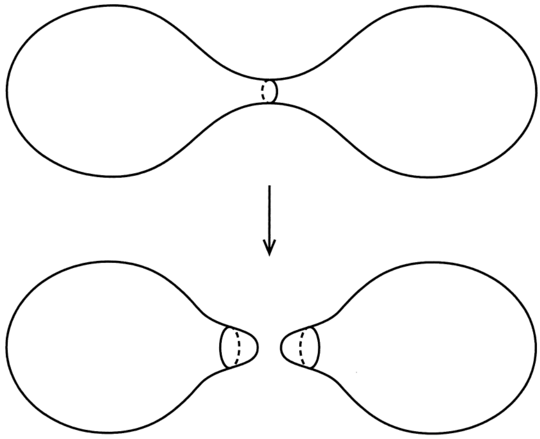


図 10　手術つきリッチ・フロー．

した際に，かなり奇麗な形のキャップを貼り付けたのである．これにより，3 次元閉多様体を手術つきリッチ・フローで変形していくと多様体の分かれたそれぞれの部分が，定常解に近づき 8 つの幾何のいずれかをもつか，もしくは断面曲率の最小値に比べて体積が非常に小さくなっていくことを証明した．後者の部分は以下の定理によってその位相幾何学的な形が分かる．

体積崩壊定理（塩谷・山口）． ある正の定数 ε_0 が存在して，任意の向き付け可能な 3 次元閉多様体で断面曲率が -1 以上で体積が ε_0 以下のものは，グラフ多様体か，または基本群が有限である．

グラフ多様体の定義は述べないが，これはよく分かっているものである．基本群が有限な閉多様体については，手術つきリッチ・フローによる変形が有限時間内に終わることが，別の方法で証明される．以上のように幾何化予想が証明された... と簡単に書いてしまったが，これを実際に実行するのは本当に難しく，様々な新しいアイディアを生み出すことによって，ようやく可能となった．ペレルマンがあまり詳しく証明を書かなかった所為もあるが，証明の検証に何年もかかったことが，いかに難しいかを物語っている．

10. おわりに

体積崩壊定理の証明では，リッチ・フローなどとは全く関係ない，距離空間の幾何学が用いられた．体積崩壊定理についてペレルマンも証明できたと主張していたが，彼自身は証明を公開していない．偶然にも同じ時期に同じ内容の定理を筑波大学の山口孝男さんと著者が共同で証明し，2003 年にプレプリントを公開した．ただし，証明に必要な重要なアイディアは既にその前に我々が書いた論文に書かれていた．我々が幾何化予想の検証作業に偶然にも加われたのは，とても幸運だったと思う．

実はペレルマンは元々は距離空間の幾何学の専門家で，私も研究会で何度か会って話をしたことがある．私が書いた論文の間違いを指摘してもらったり，私が立てた予想を彼に解いてもらったこともある．ペレルマンのことをマスコミは変人だなんだと言い立てているが，とても優しいすばらしい人である．元気にしているとよいのだが...

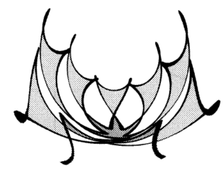
最後に文献を紹介する．幾何学に関する啓蒙的書物・記事として，1, 3, 6) を挙げておく．3) は本稿と内容が被るが，本稿よりは易しくかつ内容が少ない．本格的に幾何学を学ぶには，線形代数，微分積分，常微分方程式の習得が欠かせない．その後に読む微分幾何学の入門書として 2)，位相幾何学の入門書として 5) を挙げる．ここまで学んだ後，適時いろいろな文献で補いながら，ポアンカレ予想の解説本 7) は何とか読めるかと思う．幾何化予想や体積崩壊定理を勉強しようとすると，幾何学の博士課程のレベルになるので，さらにいろいろな勉強が必要となる．体積崩壊定理の解説は 4, 8) にある．

参考文献

1) 川久保勝夫,『トポロジーの発想―○と△を同じと見ると何が見えるか』, ブルーバックス, 講談社, 1995 年.
2) 塩谷隆,『重点解説 基礎微分幾何―曲面, 多様体, テンソル, 微分形式, リーマン幾何』, サイエンス社, 2009 年.
3) ______, 曲がった空間を見る―幾何学入門からポアンカレ予想まで,「数学のたのしみ 2007 春・夏」, 日本評論社, 2007 年.
4) ______, 3 次元多様体の崩壊,「数学セミナー増刊」, 日本評論社, 2007 年.
5) 田村一郎,『トポロジー』, 岩波書店, 1972 年.
6) 曲がってるって何？,「数学セミナー」vol.39, no.10/469, 2000 年 10 月号.
7) J.W. Morgan and G. Tian, *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture*, Clay Mathematics Monographs, 3. American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2007. xlii+521 pp.ISBN: 978-0-8218-4328-4.
8) T. Shioya, Collapsing three-manifolds with a lower curvature bound, *Tohoku Math. J. (2)* **63** (2011), no.4, 471–487.

（しおや・たかし，東北大学大学院理学研究科）

幾何学と可視化



逆井　卓也

1. 百聞は一見に如かず？

幾何学と可視化というテーマで文章を準備するにあたり，まず「百聞は一見に如かず」という言葉が頭に浮かびました．この言葉の意味は言うまでもありませんが，「百聞」という単語を少し拡大解釈して「言語的情報」と捉えたとき，これは数学において必ずしもあてはまらないように思えたのです．それはもちろん数学が対象の見た目や感覚にとらわれず，数式や論理を厳密に用いて議論を進めることを最重要視する学問であるという事実があるからにほかなりません．とくに，幾何学は図形という非言語的な対象を言語によって表す学問であり，図形の「声」を言葉を用いて他人に伝えることなしに理論を展開することは不可能です．

一方最近では，数学の講演において多くの人々がプレゼンテーション用のスライドを計算機上で準備し，それを用いて発表を行っています．適切に準備されたスライドによる講演*1)はただ論文を前にうんうんと唸るよりも遥かに効率的かつ印象的な形で理解を促します．また，数学が視覚的情報と不可分であるというのは，数学がそもそも目の前にある自然をどのように理解し，共存するかという生活上の要求に応えることから始まったということからも明らかです．

こういった状況を踏まえると，数学において視覚的情報と言語的情報を比較することは，これまでの歴史や今後の展望を見きわめる上で非常に有用なことと言えるでしょう．このような意見は今回初めて挙がったものではなく，折にふれ多くの人々によって述べられていることです．実際，本誌 2010 年 2 月号において「数学の可視化」という特集が組まれ，幾何学を中心に，可視化に関する一連の記事が掲載されています．ここでは，それらの内容とは少し異なる視点から，幾何学における可視化の役割を具体例と共に見つめ直してみたいと思います．

2. 微分積分法による直接的な可視化

まずはウォーミングアップとして**デカルトの正葉線**（folium cartessi）を題材に，素朴な意味での可視化について考えてみましょう．この曲線は，正の数 a をパラメータとして

$$x^3+y^3-3axy=0$$

という方程式を満たす平面 $\mathbb{R}^2$ の点 (x,y) 全体からなる集合として定義されます．

現在では微分積分学の講義で陰関数を扱った際に具体的な計算例として真っ先に紹介される曲線ではありますが，デカルト*2)（1596–1650）が曲線と方程式の関係を述べる中でこの曲線を発表し

*1) これを準備するのが非常に難しいことをいつも痛感しています．

*2) 直交座標の別名である「カルテシアン座標」は彼の名前からとったものです．

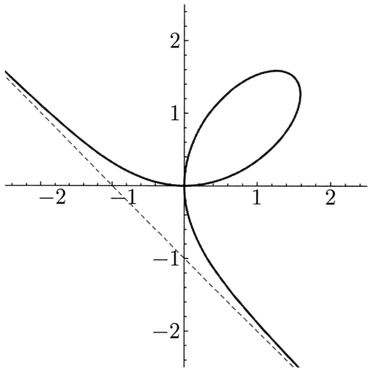


図 1　デカルトの正葉線とその漸近線.

た当時，その概形を知るのは簡単なことではなく，彼自身はその形を正しく描くことができなかったそうです．ここで彼が活躍したのが微分積分学の理論を作ったニュートン（1643–1727）やライプニッツ（1646–1716）が活躍した時代の少し前である点を見逃してはいけません．当時は方程式の近似解を求めるのもそんなに簡単なことではなかったと思われます（ニュートン法はもちろんありません）．後に，ホイエンスやベルヌーイが微分法を用いてこの曲線の形を露にしました．デカルトの正葉線は図 1 のような形をしています．図中に点線で描いた直線 $x+y=-a$ は漸近線となっています．正確に言うと，図は $a=1$ のときを Mathematica を使って描いたものなのですが，2, 3 行程度の命令文（その大部分がグラフの体裁を整えるためのもの）であっという間に作図することができました．

ここでは，技術を少し前の時代に戻して，微分法を使って曲線の概形を調べてみましょう．簡単のために $a=1$ とします．$x=t$ と固定して，y についての関数

$$f(y)=y^3-3ty+t^3$$

を考えると，$f'(y)=3y^2-3t$ となります．$t<0$ であれば，f は単調増加関数で $f(0)=t^3<0$ となるので，$f(y)=0$ となる y は $y>0$ を満たすある 1 点のみとなります．$t=0$ のときは明らかに $y=0$ のときに限り $f(y)=0$ となります．$t>0$ のとき，$f(y)$ は $y=\sqrt{t}>0$ で極小，$y=-\sqrt{t}<0$ で極大となりますが，$f(0)=t^3>0$ であって，$f(y)$ が最高次の係数が正の 3 次関数であることを踏まえると，$y<0$ において $f(y)=0$ となる y がただ 1 点のみであることがわかり，あとは $f(\sqrt{t})=-2t\sqrt{t}+t^3$ の値に応じて場合分けをすればよいことになります．以上をまとめると次のようになります．

- $t<0$ のとき，交点は 1 つで，そこでの y-座標の値は正.
- $t=0$ のとき，交点は $(0,0)$ のみ.
- $0<t<\sqrt[3]{4}$ のとき，交点は 3 つで，そのうちの 2 つの y-座標は正で，残り 1 つの y-座標は負.
- $t=\sqrt[3]{4}$ のとき，交点は $(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$ と，y-座標が負であるような別の 1 点.
- $t>\sqrt[3]{4}$ のとき，交点は 1 つで，そこでの y-座標の値は負.

このことに加え，曲線は直線 $y=x$ について対称になっています．さらに情報を得るために方程式 $F(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$ を陰関数の理論を用いて調べてみましょう．

$F_y(x,y)=3y^2-3x$ より，$F_y(x,y)=0$ と $F(x,y)=0$ を連立させて解くと，$(x,y)=(0,0)$, $(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$ となります．これらの点以外では曲線上 $y^2-x\neq 0$ となることに注意して，陰関数定理を用いると，$F(x,\varphi(x))=0$ を満たす関数 $\varphi(x)$ について

$$\varphi'(x)=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

となり，$\varphi'(x)=0$（かつ $F(x,y)=0$）となるのが $(x,y)=(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ のときであることがわかります．この点における $\varphi''(x)$ の値は $\varphi''(\sqrt[3]{2})=-2$ となるので，y-座標は $(x,y)=(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4})$ において極大となることが従います．

$x<0$ のとき $y^2-x>0$ となるので，$\varphi'(x)$ の符号と $y-x^2$ の符号は一致します．上の計算より，$x<0$ において $\varphi'(x)$ は 0 とならないので，$x<0$ を満たす曲線上の点 1 つについて $y-x^2$ の符号を調べれば $x<0$ での様子がわかります．いま曲線上の点は $x=-1$ において $-1+3y+y^3=0$ を満たしますが，これを満たす y は 1 未満となるの

で，結局 $y-x^2<0$ となることが従い，$\varphi(x)<0$ となることがわかります．

以上の情報をもとにすれば，図 1 のような形を描くことができるでしょう．なお，この曲線は

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}\quad (t\neq -1)$$

というパラメータ表示を持つことが知られています．いま，$t=y/x$ という関係式があるので，パラメータ t に対応する点を知るには $y=tx$ という直線との交点を調べればよいことがわかります．パラメータが $t=-\infty$ から出発して $t\neq -1$ を避けて $t=\infty$ まで動くとき，点は原点から出発してまず右下に進み，$t=-1$ を境に左上に抜け，$t=0$ で原点に戻り，$t>0$ の領域で葉を反時計周りに描きます．パラメータ表示の式からも明らかなように，t の絶対値が大きくなればなるほど曲線の速度は遅くなります．

以上でデカルトの正葉線を自分たちの手で可視化することができました．計算機を使って一瞬で表示してしまうのに比べ，かなりの時間がかかり，かつでき上がったものの精度も決して良いものではありませんが，手を動かした分愛着も湧いてくるのではないでしょうか．

問　デカルトの正葉線の「葉」の内側の面積を計算して下さい．

3. 計算機を用いた直接的な可視化 1

次に，計算機による可視化が研究に還元された有名な例として，**極小曲面**の理論における**コスタ曲面**を紹介します．

極小曲面とは $\mathbb{R}^3$ 内の曲面であって，曲面上のすべての点において**平均曲率**と呼ばれる量が 0 となっているようなもののことを言います．極小曲面は石鹸膜が作る曲面としても知られ，今なお盛んに研究が行われています．詳しい定義については小林昭七先生の教科書[1)]や文献 2) を参照して下さい．極小曲面を構成する代表的な方法として次が知られています．

定理 1（ワイエルシュトラス–エネパーの公式）D を単位開円板 $\{w\in\mathbb{C}\mid |w|<1\}$ もしくは全平面 $\mathbb{C}$ とし，$f(w)$ を D 上の正則関数，$g(w)$ を D 上の有理型関数で $f(w)g(w)^2$ が D 上の正則関数であるようなものとするとき，

$$x=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^w f(w)(1-g(w)^2)\,dw\right\},$$
$$y=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_0^w if(w)(1+g(w)^2)\,dw\right\},$$
$$z=\mathrm{Re}\left\{\int_0^w f(w)g(w)\,dw\right\}$$

で表される曲面（$w=u+iv$ により 2 つのパラメータ u,v を持つとみなす）は極小曲面である．

この公式はしかるべき条件の下で逆も成り立つほどに非常に強力なものなのですが，公式内に複素積分が現れており，式から直ちに曲面の形を想像することができません．また，できあがった曲面が自己交叉を持ってしまうこともあります．

1982 年にコスタは博士論文において「種数が 1 で 3 つの埋め込まれたエンドを持つ完備極小曲面の構成」という重要な仕事をしましたが，そこで構成された曲面（コスタ曲面）はワイエルシュトラス–エネパーの公式における $f(z)$ と $g(z)$ を与えたものであり，その具体的な形状まではわかっていませんでした．とくに，曲面全体で自己交叉を持つかどうかも問題として残されていました．

これに対し，ホフマンとミークスは 1985 年の論文[3)]において，コスタが得た曲面の式の複素積分を巧妙に実行し，コスタ曲面がガウス整数を格子点とする格子に対応するワイエルシュトラスのゼータ関数 $\zeta(w)$ とペー関数 $\wp(w)$ を用いて

$$x=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{-\zeta(w)+\pi u+\frac{\pi^2}{4e_1}+\frac{\pi}{2e_1}\widetilde{\zeta}(w)\right\},$$
$$y=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{-i\zeta(w)+\pi u-\frac{\pi^2}{4e_1}+\frac{i\pi}{2e_1}\widetilde{\zeta}(w)\right\},$$
$$z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\log\left|\frac{\wp(w)-e_1}{\wp(w)+e_1}\right|$$

と表されることを示しました．ここで，$w=u+iv\in\mathbb{C}$, $e_1=\wp(1/2)\fallingdotseq 6.87519$,

$$\widetilde{\zeta}(w) = \zeta\left(w - \frac{1}{2}\right) - \zeta\left(w - \frac{i}{2}\right)$$

とします．そしてさらに，計算機を用いてコスタ曲面の可視化を行ったのです．その結果は図 2, 3 のようなものでした (これらの図は Mathematica を使って筆者が描いたものです．彼らが作った図は論文の最後の章にあります)．

これらの図は描画範囲を小さく限っており，実際の曲面は (図 2 において) 上と下の開いた口のような部分はそのまま無限まで平面のように広がり続け，また中央の平面部分もそのまま無限まで広がっていきます (この 3 枚の部分がエンドにほかなりません)．この図を見て，ホフマンとミークスはこの曲面が自己交叉を持たないことを観察し，それを数学的に厳密に証明したのです！ また，図を見るとコスタ曲面が「中央の平面部分に対してひっくり返して 90 度回転させる」，「中央の平面部分に垂直なある平面に関する鏡映」という 2 種類の対称性を持っていることが簡単に見てとれます．すなわち，8 つの元からなる 2 面体群の対称性 (正方形が持っている対称性と同じ) を持っていることになります．いま意図的に「上と下の開いた口」と「中央の平面部分」という言葉を定義なしに述べましたが，図を見た方の多くはそれらが何を指し，どのような対称性があるかを直ちに理解していただけたのではないでしょうか．これこそがこの可視化の力にほかなりません．もちろん，ホフマンとミークスはこれらの対称性の存在についても厳密な証明を与えました．

通常，図の情報のみから何らかの性質を持つと述べただけではほとんどの場合にそれは証明でなく，観察であるとみなされてしまいますが，それをヒントにして数学的に証明を行った場合，その主張はもちろん疑いようのない数学的事実となります．コスタ曲面は計算機による可視化を通じ，最終的に数学的な事実を得たという，計算機と我々人間のコラボレーションとして最良の成果を収めたと言えるでしょう．

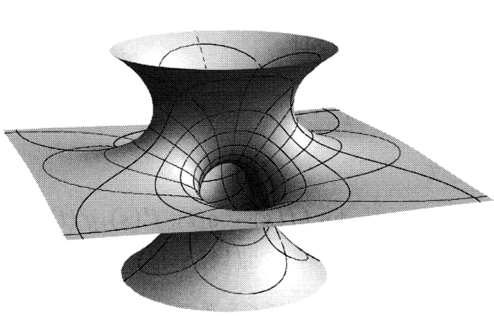


図 2　コスタ曲面．

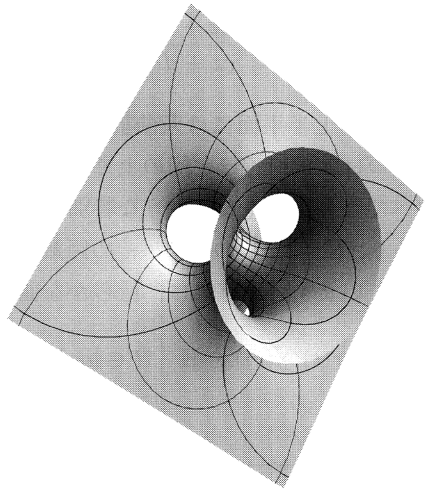


図 3　コスタ曲面 (別の角度から)．

問　コスタ曲面上には直交する 2 直線が存在します．それはどこにあるでしょうか．

4. 計算機を用いた直接的な可視化 2

もう 1 つ計算機を用いた可視化の代表的な例を見てみましょう．双曲幾何や関連する離散群の理論において，離散群が様々な幾何的対象に作用する場面に出くわします．代表的なものとして，**モジュラー群**

$$SL(2,\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a,b,c,d \in \mathbb{Z} \\ ad-bc=1 \end{array} \right\}$$

の**上半平面**

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

への 1 次分数変換による作用

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}$$

があります．上半平面には**双曲計量**と呼ばれる，実軸に近づけば近づくほど図の上での見た目の長さに比べて距離が長くなるような特別な距離の測り方があり，$SL(2,\mathbb{Z})$ の作用はその距離を保つ変換となっています．正確には，滑らかな曲線

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{H} \quad (t \in [a,b])$$

の長さは

$$\int_a^b \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)}\, dt$$

という式で与えられ，この距離の測り方の下で，2 点を結ぶ最短線は実軸と垂直な線分，または実軸上の点を中心とする円弧の一部という形で与えられます．それにより $\mathbb{H}$ 上では**非ユークリッド幾何**と呼ばれる，ユークリッドの 5 公理のうちで平行線の公理だけを満たさないような幾何が展開されるのです．

図 4 は，$0, 1/2, 1 \in \mathbb{C}$ という 3 点（これらは $\mathbb{H}$ 上の点ではないのですが，その空間の**理想境界**上の点と呼ばれるものとして意味を持ちます）を頂点とする「三角形」を $SL(2,\mathbb{Z})$ の元による作用によって次々に写していったときに現れる，互いに合同な「三角形」によるタイル張りの様子を表しています．このように離散群の作用はしばしば空間の上に美しい模様を描き出しますが，その模様を人の手で描くにはかなりの忍耐が必要です．それを計算機はメモリなどの資源がある限りいくらでも計算と描画を続けてくれます．実際のところ，無限回の作用の様子を描くことはできません．図 4 も正しくは 10 ステップほどで打ち切ったものとなっています．ここで挙げたのは非常に典型的な一例ですが，文献 4) には，群作用から得られる様々な模様が，その背景とともに生き生きと描写されています．

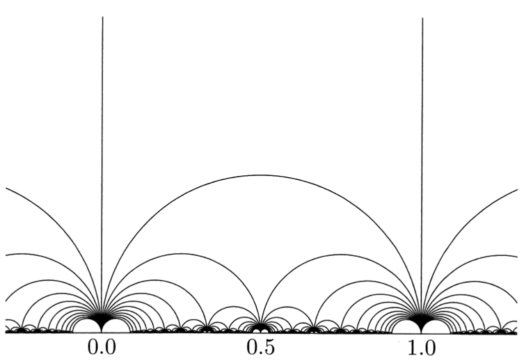


図 4　モジュラー群の作用による上半平面のタイル張り．

5. 間接的な可視化

数学が扱う幾何学は，3 次元までの目に見える空間という枠にとらわれず一般の次元をもその考察の対象としています．最後に，3 次元には収まりきらず，眼に見えないはずものを間接的に可視化している場面を見てみましょう．

位相幾何学（トポロジー）の研究分野の 1 つに**結び目理論**と呼ばれるものがあります．**結び目**とは我々が日常眼にする結ばれた紐のことにほかなりませんが，数学的には円周

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

という図形を $\mathbb{R}^3$ の中に自己交叉を持たないように埋め込む写像 $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$ として定義されます*3)（写像 $f : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ で $f(0) = f(1)$ 以外に自己交叉を持たないものと言っても同じです）．

結ぶという行為は日常生活のいろいろな場面で行われており，それについて誰が初めて関心をもったかというのは無意味な問いと言えるでしょう．一方で，結び目を最初に数学的に研究したのはガウス（1777–1855）であると言われています．ガウスは 2 つの結び目

$$f(s) : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad g(t) : [0,1] \to \mathbb{R}^3$$

に対して

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\det\left(f(s) - g(t), f'(s), g'(t)\right)}{4\pi \|f(s) - g(t)\|^3}\, dsdt$$

*3)　多くの場合は写像 f に C^∞ 級であるなどの滑らかさを要請しますが，ここでは深く考えないことにします．

という2重積分がその2つの結び目の（向きを込めて）絡んでいる回数を与えることを証明しました．絡んでいる「回数」という表現からも明らかなように，この積分は整数の値をとり，かつ結び目の連続的な変形で変わらないという著しい性質を持っています．すなわち，写像 f, g の厳密な数式でなく，それらを連続変形の許したもの，つまりは位相的な性質が積分を支配しているのです．

結び目の絡まり具合を調べるという本来の動機から考えると，解析的な視点というよりはむしろ位相的な視点からの研究を進めるほうが自然なように感じられますが，実際の研究の現場ではまさに後者の観点を中心として研究が進められてきました．2つの結び目 $f(s)$ と $g(s)$ が同じ（**同値**）であるとは $\mathbb{R}^3 \times [0,1]$ の（滑らかな）自己同相写像 H であって，

- $H(x,t)$ は $\mathbb{R}^3 \times \{t\}$ の自己同相写像，
- $H(x,0)$ は $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ の恒等写像，
- $H(f(s),1) = g(s)$

を満たすものが存在するときを言います．H は $\mathbb{R}^3$ の**全アイソトピー**と呼ばれています．

さて，結び目理論の学習を開始するとすぐに出会う基本定理として，**正則射影の存在定理**と**ライデマイスターの定理**というものがあります．これらの定理は，結び目の像を平面上に高々有限個の2重点（交叉点）の特異性しか持たないように射影することができ，また，そうして得られる平面上の2つの図（交叉点における上下の情報つき）がどのようなときに同値な結び目を与えるのかという条件を与えるものです．ここまできて「これのどこが可視化なのか」と思った方も多いかと思います．実際，結び目は可視化するまでもなく見えているからです．しかしながらここで可視化されているのは結び目そのものでなく，その全アイソトピーのほうであることに注意して下さい．重要なのは平面への射影図を見れば元のものが復元できるという事実であり，それは結び目の同値性を司る $\mathbb{R}^3$ の全アイソトピーのなす集合のある意味での単純性，柔軟性を表しているのです．

6. 新たなる可視化の方法？

ここまで見てきたように，数学における可視化というプロセスは技術の進歩や理論の深化にともなって様々な形で行われ，そして数学の世界への還元をもたらしてきました．

ところで，最近は3Dプリンターと呼ばれるものが少しずつ認知され，その用途にいろいろな期待が寄せられているようです．既にどのようなものかご存知の方も多いかもしれませんが，まず計算機上で立体の3Dデータを作成し，その情報を専用の機械に送ると，紫外線を使って液状の樹脂を固めたり，熱で溶けた樹脂を少しずつ積み重ねたりするなどをして，立体の模型を作成してくれるというものです．かつて多くの技師や職人が作成した曲面の模型がもはや研究室で（3Dデータの作成が苦でなければ）手軽に作れる時代になったと言えます．この技術が幾何学の可視化における新たな1ページをもたらすことも十分に期待されます．

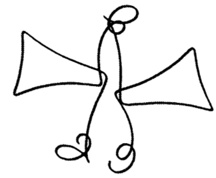
一方，こういった執筆時の新しい技術を紹介することの常として，今後その技術がどのような道を辿ることになるかは全く予想できません．明日にでも新しい技術が現れて数年後の世界を席巻しているかもしれません．この文章を筆者自身が数年後に再び読むことになったとき，どのような感情をいだくのか今から楽しみでなりません．

参考文献

1) 小林昭七，『曲線と曲面の微分幾何（改訂版）』，裳華房，1995.
2) 若山正人編，『可視化の技術と現代幾何学』，岩波書店，2010.
3) D.A. Hoffman, W. Meeks III: A complete embedded minimal surface in $\mathbb{R}^3$ with genus one and three ends, *J. Diff. Geom.* **21** (1985), 109–127.
4) D. マンフォード，C. シリーズ，D. ライト（小森洋平訳）『インドラの真珠—クラインの夢みた世界』，日本評論社，2013.

（さかさい・たくや，東京大学大学院数理科学研究科）

幾何学的結び目理論へのいざない



今井　淳

1. はじめに

幾何学的結び目理論とは，通常の結び目理論のように結び目不変量を研究するのではなく，埋め込み写像としての結び目の複雑さを測る幾何学的な量を見つけ，その量の臨界点となる結び目の存在や性質を調べる，といったことを中心とする学問である．

2. 結び目のエネルギーとは

このような量（以下簡単のためにエネルギーと呼ぶ）を考える動機は，各々の結び目型の中でエネルギーを最小とするようなものとしてその結び目型の「最適な形」を定めたいという，作間誠先生が提出した問題であった．面積を使って極小曲面というきれいな形を得るのとある意味で似たことをしよう，という算段である．

与えられた結び目型の「最適な形」を求めるため，エネルギーを減らすように与えられた結び目を変形することを考える．運よくエネルギーの臨界点となる結び目まで変形できたとしても，もしも変形の過程で結び目型が変わってしまっていたら，元々の問題の答は得られない．結び目が自己交叉すると結び目型が変わることがあることから，結び目の空間上の汎関数で，結び目が二重点を持とうとすると $+\infty$ に発散するようなものを扱うことにし，これを**結び目のエネルギー**と呼ぶ．このような要請から，求めるエネルギーは結び目の大域的な情報を拾い上げる必要があり，曲率など局所的な量の積分だけではうまく行かない．

この問題への自然なアプローチとして，結び目が荷電しているとしたときの静電エネルギーが考えられる．クーロン斥力のおかげで，エネルギーを減らすように結び目を変形するとき自己交叉しないだろうと期待できるからである．このようなモチベーションの下，福原真二先生は作間先生とは独立にこの研究の有限次元版を始めていた．折れ線結び目の頂点に電荷を置いた時の静電エネルギーを減らすように，折れ線結び目を変形してきれいな形を得るプログラムを作り数値実験をしたのである．ここで，電荷間の斥力が距離の何乗に比例するかはパラメータとして変えられるようになっていた．

これを滑らかな結び目でやろうとすると，積分の発散という困難に直面する．つまり2点間の距離の $-\alpha$ 乗を結び目2つの直積空間上で積分しようとすると，$\alpha \geq 1$ のとき対角成分で発散してしまう．そこで対角成分の ε 近傍を取り除いたところで積分し，得られた値を ε で級数展開する．その定数項を結び目の **$r^{-\alpha}$-エネルギー**と定義する（ちなみにこの級数の定数項以外の係数も面白い対象で，全二乗曲率など，曲率・れい率，およびそれらの微分の関数を積分した形をしている）．

3.（所謂）メビウスエネルギー

このように定義された $r^{-\alpha}$-エネルギーが実際に我々の意味での結び目のエネルギーになるのは $\alpha \geq 2$ の場合である．そこでまず $\alpha = 2$ の場合を研究した[1]．後に Freedman たちにより，このエネルギーはメビウス変換で不変であることが分かり，そのためメビウスエネルギーとも呼ばれるようになった[2]．Freedman たちはこのメビウス不変性を用い，素な結び目型にはエネルギー最小結び目が存在することを示し，最初の問題に対する部分的な解答を与えた．一方 Kusner と Sullivan は数値実験の結果より，合成結び目型にはエネルギー最小結び目が存在しない（エネルギーを減らすように合成結び目を変形していくと，各構成タングルが 1 点につぶれる）と予想している[3]．

4. その後の発展

古い話が続いたので，その後のこともざっと目を通しておこう．参考文献は，筆者のホームページにおいてある常に未完の集中講義ノートを参照してほしい[4]．

まず，結び目に対し似たような形のエネルギーがいくつか新たに見つかった．ちょっと変わったものとして，距離の冪を複素数として複素関数として考える，というものがある（結び目のベータ関数という）．解析接続を用いると繰り込みせずに済み，留数として幾何学的な量が得られる．曲率を大域化したもの（Menger 曲率）の積分（L^p ノルム）も $r^{-\alpha}$-エネルギーとよく似た性質を持つ．別種のものとして，結び目の射影図の交点数を射影の方向すべてで平均して得られる平均交点数も，その結び目の幾何学的な複雑さを測るよい指標で，DNA や高分子の研究に端を発したランダムポリゴンの研究で有効である．またメビウス幾何との結びつきも生じた．

閉曲面やより高次元への拡張もなされた．繰り込みを用いる方法，角度を用いる方法などがある．これを（超）曲面ではなくて境界つき領域でやろうとすると，エネルギーにいたる前段階として，Riesz ポテンシャルの繰り込みが出てくる．これは凸幾何の双対体積の一般化になっている．このポテンシャルの最大（最小）点として，その領域の重心を含む「中心」の族が得られる．これには柴田勝征先生の三角形の灯心も含まれる．領域が三角形の場合は，パラメータを $\pm\infty$ にすると外心，内心が得られる．また，このポテンシャルのうちメビウス不変なものの積分を，結び目の Seifert 膜に適用すると，結び目とランダムな円との絡み数の二乗の平均を繰り込んだものが得られる．

エネルギー最小結び目の問題は解析と非常に相性がよく，近年になってエネルギー最小結び目の滑らかさなどの研究がいくつかのグループによってなされている．長澤壯之先生と石関彩さんがメビウスエネルギーのメビウス不変性の純粋に解析的な証明を与え，その過程で，すぐ上に書いたランダムな円との絡み数の二乗の平均を繰り込んだものが出てきたのには，大変驚いた．

5. まとめ

この問題は取っ付き易いおかげで，幸いにもいろいろな分野の人たちに興味を持ってもらうことができ，(微分) 幾何，解析 (偏微分方程式)，さらには統計物理や DNA の研究者も参入して，幾何学的結び目理論の誕生に繋がった．予期せぬ分野からの新発見があり，コンスタントに進展が望める分野だと思っている．結び目なんか関係ないと思っている人にも是非興味を持っていただけたらと願っている．

参考文献

1) J. O'Hara. *Topology* **30** (1991), 241–247.
2) M.H. Freedman, Z-X. He and Z. Wang. *Ann. of Math.* **139** (1994), 1–50.
3) R. Kusner, and J.M. Sullivan. *Ideal Knots.* A. Stasiak, V. Katrich, L.H. Kauffman eds., World Scientific, Singapore 1998, 315 – 352.
4) http://www.comp.tmu.ac.jp/knotNRG/download/12集中講義.pdf

（いまい・じゅん，首都大学東京大学院理工学研究科）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

橋本 義武

幾何学の名著 管状近傍をめぐって

幾何学・トポロジーの基本概念に**ε 近傍**というものがある．ユークリッド空間の場合，点 x を中心とする半径 $\varepsilon > 0$ の開球のことである．さらにユークリッド空間の部分集合 M の ε 近傍を，M の各点の ε 近傍の和集合と定義する．

点の ε 近傍を用いて開集合が定義され，極限や連続性の議論をする設定が整うわけだが，部分集合の ε 近傍にも幾何学的意味がある．

例えば空間曲線 C の場合，ε を十分小さく取っておくと，C の ε 近傍 T は管のような形をしている．『管のような形』とは，金太郎飴のように T のどの断面も半径 ε の開円板になっているということである．T の断面とは，C の各点 x における法平面（x で C に直交する平面）と T の交わりのうち，法平面上の最も近い C の点が x であるような部分のことである．C と x における法平面とが x 以外の点でも交わることがあるので，こういうもってまわった言い方をするのである．T を C の**管状近傍**という．

微分積分法の誕生により，円錐曲線の範疇をはるかに超えていろいろな曲がった図形に興味の対象が広がった．そのような曲がった図形の幾何学では，曲線 C の曲がり具合をどのような量で表すか？というのが基本的な問いになる．

アイデアは，C を太らせること，すなわち管状近傍を考えることである．曲線を太らせると，曲がっているあたりの内側が縮み，外側が伸びる．そこで，曲線上の法ベクトル場 $u(x)$ に対し，「$u(x)$ の方向に曲線をちょっと動かしたとき，曲線がどれくらい伸び縮みするか」に着目する．ベクトル $u(x)$ に対する伸び縮みの割合によって，点 x における曲線の曲がり具合を数量化することができる．金太郎飴の場合，金太郎の鼻が曲線 C のところにあるとすると，金太郎の右目，左目，口という風に金太郎の顔の地点を指定することで法ベクトル場が定まる．

n 次元ユークリッド空間の部分集合 M が余次元 r の部分多様体であるとは，M の各点の近傍において，n 個の座標変数のうち $n-r$ 個を独立変数に，r 個を従属変数に選んで，M を r 個の $n-r$ 変数 C^∞ 級関数のグラフとして表すことができる，ということである（円 $x^2+y^2=1$ の場合を考えれば，何が言いたいのかがおわかりいただけるだろう）．部分多様体 M の各点における法ベクトル空間による M の ε 近傍 T の断面が，半径 ε の r 次元開球になるとき，T は M の**管状近傍**であるという．

管状近傍 T の点に対しそれを含む断面の中心である M の点が決まる．これは T の点から M に下ろした垂線の足という初等幾何でおなじみのものである．また，空間の極座標が役に立つのは，それが球面の管状近傍を記述するのに適した座標系だからである．

より一般に，多様体の部分多様体に対しても管状近傍が定義される．その構成のためには長い道筋をたどる必要がある．管状近傍こそが幾何学・トポロジーにおける最も重要な基本概念だ．私がそんな風に思うのは，読んできた本の影響だろう．そういうわけで，管状近傍に関わる本を選んでみた．

ベクトル空間 V の部分空間 W, W' が**横断的**であるとは，$W+W'=V$ であることである．多様体 E の部分多様体 M, M' が横断的であるとは，$M \cap M'$ の各点において，M, M' の接ベクトル空間が E の接ベクトル空間の部分空間として横断的であることである．このとき，$M \cap M'$ は M, M' の部分多様体になる．$M \cap M'$ が 0 次元になる場合，点の個数を数えると意味のある量が得られることがある．

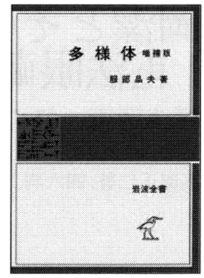
部分多様体 $M \subset E$ の法ベクトル場によって，管状近傍の中で M を少し動かすことができる．そうすることで，E の他の部分多様体との交わりを横断的にすることができ，交わりが多様体であるようにすることができる．この操作はトポロジストが日頃当り前におこなっていることであるが，それが当り前のことであるのは，ひとえに管状近傍と横断性の理論が確立しているおかげである．

この構成から，部分多様体に対して零点をもたない法ベクトル場が存在するか，が幾何学的に重要な問いであることが了解できる．これはすなわち，**ベクトル束のねじれ**が幾何学・トポロジーの重要な研究対象だということである．ベクトル束のねじれは**コホモロジー**と**特性類**によって記述される．

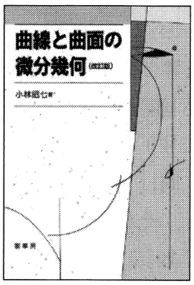
（はしもと・よしたけ，東京都市大学知識工学部）

多様体 増補版

服部晶夫著，B6 判，292 頁，岩波書店，1989 年



多様体の教科書の良書は数多い．その中でこの本には横断性と管状近傍のことがきちんと書かれていて，陰関数定理および常微分方程式の解の存在と一意性が我々の幾何学的直観を構成していることを明確に認識することができる．



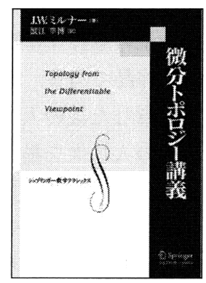
曲線と曲面の微分幾何(改訂版)

小林昭七著，A5 判，216 頁，本体 2600 円，裳華房，1995 年

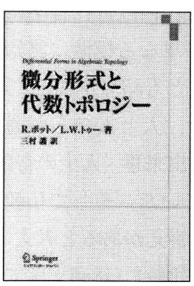
ガウス驚愕定理は，「曲面の外側の情報である，管状近傍の伸び縮みを表すガウス曲率が，曲面上の情報である，曲線の長さの公式に現れる二次形式（リーマン計量）で書ける」ところが驚くポイントである．

微分トポロジー講義

J.W. ミルナー著，蟹江幸博訳，A5 判，131 頁，本体 2500 円，丸善出版，1998 年



「ユークリッド空間の中の多様体の外側の情報である，管状近傍の境界からのガウス写像の写像度が，多様体上の情報である，ベクトル場の零点の指数の総和に等しい」ことを示すことで，オイラー数という不変量を得ることができる（ポアンカレ＝ホップの定理）．



微分形式と代数トポロジー

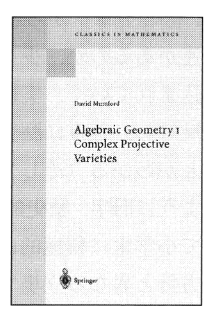
R. Bott, L.W. Tu 著，三村護訳，420 頁，シュプリンガー・ジャパン，1996 年

金太郎飴のようにどこで切ってもトム類のことが書かれている．トム類とは，部分多様体の管状近傍にぼやっと色を塗ったような微分形式で，金太郎飴のようにどの断面で切っても積分が 1 になる．

Algebraic Geometry I

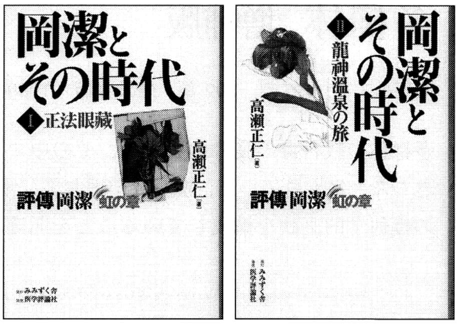
Complex Projective Varieties

D. Mumford 著，204 頁，Springer，Reprint of the 1st ed. Berlin, Heidelberg, New York 1976. Corr. 2nd printing 1981



「平面上の m 次曲線と n 次曲線の交点はちゃんと数えれば mn 個」というベズーの定理はトポロジーの定理である．「ちゃんと数えれば」のところが管状近傍や横断性に関わっている．

岡潔とその時代
I 正法眼藏, II 龍神溫泉の旅
評傳岡潔　虹の章



高瀬正仁著, 四六判, I：372 頁, II：292 頁, 本体各 3800 円, みみずく舎

著者高瀬正仁氏は，近年数学史関連の著作を多数公にしてきた．オイラー，ガウス，ヤコービ，リーマンをはじめとする 18 世紀から 20 世紀にわたる主要な数学文献を幅広く翻訳する作業に取り組んでいる．またインターネット上で「オイラー研究所」所長として日夜ブログを更新し，数学史その他にまつわる話題を提供し続けている．とにかく研究対象に対して，人並み外れた愛情と情熱を持つ人物であることは確かである．

岡潔は高瀬氏が若き日に数学上の師として仰ぐようになってから，一貫して追究されてきたテーマである．本書は，岡潔の評伝シリーズとして上梓された『評傳岡潔　星の章』,『評傳岡潔　花の章』（ともに海鳴社）に続く作品である．本書は，1960 年代，岡潔が文化勲章を受章した後の人生における，広範な人間関係によって彼の人物像を描き出そうとする．したがって，本書を単独で読むことよりも，関連する上記の著作も併読することを著者として期待しているだろう．岡潔の数学者としての側面をより簡潔に知りたい場合には，同じ著者の『岡潔　数学の詩人』（岩波新書）のほうが適っている．また，岡が残した数学的業績にさらに関心を寄せるならば，奈良女子大付属図書館がインターネット上で公開している「岡潔文庫」が有用である（公表論文の一つ一つに解題が付されている）．昨年の 3 月に刊行された野口潤二郎『多変数解析関数論』（朝倉書店）にも，有益な情報が掲載されている．ただし，本稿では，あくまで単独でこの著作を読んだ上での，評者の印象を述べたいと思う．

石井式漢字教育の実践者，石井勲氏をめぐる話題（第 I 巻第 1 章）から物語は始まる．岡潔とどのような関連があるのか．少し意表を突かれる形で，まずは引き込まれていく．実は，岡は戦後進められた漢字制限に反対し，さらに歴史的仮名遣いの復活を願っていたことがわかる（そして本書も，そうした岡の考えに沿うように旧字，歴史的仮名遣いで記述されている）．そして小学生に積極的に漢字を教える実践，すなわち公の方針と異なる立場で信念を貫く人に岡が共感を寄せたことが記されている．1962 年 8 月 14 日，石井の講演の場に，岡は観客として現れ，石井と直接会話を交わした際に,「小学校では数学よりも国語が大事だ」と強調し,「漢字は心の珠を磨く道具です」という言葉を口にしたという（第 I 巻，100 頁）．岡は自らのアイデンティティとしての日本文化を愛し，それを守りたいという意味で徹底した保守主義者である．そして，著者はその岡の言葉を「美しい言葉」と評する．

保守主義者岡潔の本領は，国民文化研究会での講演でも発揮される（同，第 2 章）．1965 年 8 月講演「日本的情緒について」は，中でも代表的である．岡は，その講演中で「日本的情緒というのは，これは日本民族というお魚がそこに住んでいる水のようなものである」と述べたという．「情緒」，岡を理解するための一つのキーワードである．著者は，再びその岡の言葉に対して「講話全体を象徴する美しい言葉であり…」と評する（同，163 頁）．または 4 年後の同じ研究会での講演「欧米は間違っている」で，西欧近代科学に対する批判を述べた上で，日本人が単なる模倣に終始することに岡がいら立ちを示したことも紹介される（同，177–186 頁）．岡は，人が出会い，人と人の心が通い合う，その実現することがまれな出来事（人生の奇跡）がなぜ起きるのかを関心事にしていた．そして仏教の中にこそ，彼自身の問いに対する答えがあると考える．加えて，小林秀雄の対談『人間の建設』（新潮文庫で読むことができる）に至る経過も記されている．エッセイ集『春宵十話』に好意的な批評を寄せたことをもって，小林のことを「最良の理解者」と岡は考えた（同，150 頁）．小林も岡に会ってみたいと考え，二人の対談は実現する．まさしく，心が通い合って互いに引き寄せられ,「人生の奇跡」が生じたということなのだろう．岡の人生後半を彩る人間的ネットワークができ上って行く様子が，評者には興味深く感じた．

第 II 巻に入り，小林秀雄との対話を通じて，岡の数学観が浮き彫りにされる．岡は「とめどもなく抽象化

に傾いていく現代数学の趨勢を前にして一貫して否定的であった」（第II巻，359頁）．小林の「数学というものはもともと抽象的な世界だと思います」という発言に対して，「それは内容がなくなって，単なる観念になるということなのです」と返答する．すかさず小林が「そうすると，やはり個性というものもあるのですか」と切り返すと，「個性しかないでしょうね」と岡は断言する（『人間の建設』（新潮文庫），25–26頁）．岡にとって数学とは何であるのか．岡は「数学とはどういうものかというと，自らの情緒を外に表現することによって作り出す学問芸術の一つであって，知性の文字板に，欧米人が数学と呼んでいる形式に表現するものである」（『春宵十話』（光文社文庫），3頁）と規定していた．彼が生涯をかけて追究した「ハルトークスの逆問題」は，著名なフェルマー，ポアンカレ，リーマン等による定理，予想と異なり，「あくまでも岡がクリエイトした問題」であり，「この問題それ自体が岡に固有の情緒の表現」であると著者は述べる（第II巻，375頁）．このあたりが一般にはびこっている数学へのイメージ，思い込みと相容れない箇所かもしれない．著者は岡の発言や行動に沿って岡の思想の最重要部分を記述し，説得力を持たせていると評者は感じた．しかし飲み込めない人は，違和感を埋め合わせられないかもしれない．

第II巻の後半部の，「日本浪曼派の主軸」と称され，『現代畸人傳』を著わした国学者保田與重郎との交流の中でも『春宵十話』は話題の中心となる．保田は毎日新聞連載時から愛読者で，『春宵十話』を「教育，人道，理想の問題から，人間のあるべきようの一切を論じた書物」と評したという（同，409頁）．ただ，1960年代後半，『春宵十話』以降に発表する著作や発言によって岡のイメージは，次第に「世俗に超然とした孤高の数学者」から「憂国の数学者」（同，461頁）と変わっていった．日教組への反感を露わにし，「教育は人間がするもので，組織がするものではない」，「わしの教育はすべてマンツーマン」（同，455–456頁）と語る岡に，ある種の筋の通った正論を見いだすことはできる．だが評者は，善悪，価値の基準が鮮明であることとは別に，ありがちな性急さが表れているようで，少し複雑な気持ちになった．著者は，時代背景をもとに岡の態度に理解を示している．

学校（特に初等，中等段階での）教育によって，良くも悪くも数学に対する印象が作られるが，それを覆す新鮮さがこの著作にはある．ただ，この岡潔とわれわれの距離は決して小さくはないと同時に思う．岡の仏教への関心を相対化するべく，著者は第I巻第3章で，仏教学者の玉城康四郎の評言を紹介する．玉城は道元に岡が入れ込むことに関して，「何かに感動して引用しているにちがいないけれども，文脈がぼくには全然わからない」と述べたそうだ（第I巻，304頁）．小林も対話の中で「あなたは確信したことばかりを書いていらっしゃいますね」と述べていた（『人間の建設』，110頁）．両者の岡への批評は鋭い面があると感じる．岡は独自に座標軸を持ち得た稀有な人物なのである．そして著者が深い敬意の念を抱く由縁もそこにあるはずである．ただし，その独特の世界観は，峻厳で人を寄せ付けない印象も抱かせる．

グローバリズムがはびこる今日だからこそ，日本的情緒に対してこだわり，「数学を日本で研究するということの真実の意味を，岡は早くから感知していた」（第II巻，583頁），その「ぶれない」態度は，さわやかにさえ感じる（福田恒存，小林秀雄等の著作が再び取り上げられるのも同様の傾向か）．著者自身が

> 論理主義と素朴実在論に依拠して十九世紀の数学の遺産を消費するだけではなく，数学という不思議な学問の魔力の根源を回想し，「情緒の世界」の再生を試みて魂を継承する時期にさしかかっているのではあるまいか（同，391頁）．

と結論づけるところが，最も強調したかったことなのだろう．評者も共感する部分が多々ある．だが，伝記作者として，著者の岡に対する距離の取り方は果たして適切なのか，という疑問が残る部分もあった．たとえ，岡が良き意味での保守主義者であったとしても，数学者が語るその言説がどう受け止められ，広まっていったか．戦後の論壇の中で，どのように位置づけられるのか．岡の言説を「美しい」と称える高瀬氏は，「岡先生を客観的に評価などできるか」と反論されるかもしれない．本書に，冷徹さを備えたルポルタージュを期待するならば，当てが外れる．むしろ著者個人のほとばしる熱い思いを受け止める作品であると評者は感じた．

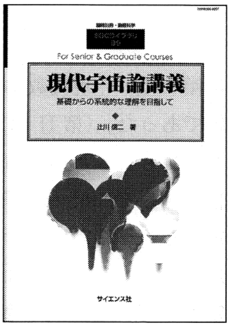
林　知宏（学習院中等科・高等科）

BOOK REVIEW

現代宇宙論講義

基礎からの系統的な理解を目指して

辻川信二著，B5 判，208 頁，本体 2476 円，サイエンス社



古来，宇宙は人々にとって最も関心のあるテーマであったし，今もそうであることは間違いないであろう．宇宙の神秘性のためか，宇宙論は，宗教との結びつきも強く，哲学的な考察の対象でもあった．それが現代技術の急速な進歩に伴い，実験や観測に裏付けされた精密科学としての地位を確立してきたのである．その必然の結果として，今まで身近な存在であった宇宙論が，一般相対性理論という，いかつい鎧を着た，遠い存在になってしまった．実際，宇宙論を学ぶことは，数学的にも，物理学的にも，かなりハードルの高いものであり，大学の理学部でもきちんとした教育をしているところは稀である．あったとしても現在の精密観測から得られるデータの意味を理解するレベルまで到達することは困難を極める．では，教科書はどうであろうか？ 宇宙論の理解には物理学全般の総合的な理解が要求され，基礎から最先端までを詰め込むと膨大なページ数が必要になる．そのため，つい最近まで日本語で書かれた大学院レベルの教科書は存在しなかった．教科書を書くためには，どのような知識を仮定するのか，何に重きを置くのかという点において思い切った選択をしなければならない．本書は，場の量子論と一般相対性理論の知識は前提とし，宇宙論的摂動理論，及びその応用として，宇宙背景放射や大規模構造の精密観測データの意味を理解すること，に重点を置いて書かれたユニークな宇宙論の教科書である．

さて本書の構成であるが，第 1 章で歴史的な概観を行い，全体の導入としている．第 2 章で宇宙モデルを導入し，フリードマン方程式も導かれている．この章を読むだけでも宇宙論の何たるかが概観できるのではないだろうか．第 3 章では，宇宙論的摂動論の基礎が非常に丁寧に解説されている．ただ，スカラー場の作用として標準的ではないものまで含めて一般的に議論しているので，少し初心者は面食らうのではないだろうか．初めて宇宙論的摂動論を勉強する読者は，すべての表式を標準的な場合に帰着させて理解することを強く勧める．第 4 章はインフレーション理論に関する簡潔な入門となっている．揺らぎの統計性に関してもかなりのページ数を割いていて読み応えがある．おそらく，この統計性の議論の準備のためであろうが，ここでも，最初から一般的なモデルまで含めて議論しているので，初心者にとっては分かりにくくなっているのではないかと危惧される．書く方としては，ページ数の都合もあるので，ここは標準的な場合の表式だけを書き下してみるなど，読者の努力が要求されるところであろう．第 5 章は次章への準備も兼ねて元素合成やバリオン数生成の話題が解説されている．第 6 章の宇宙背景放射は本書の中で最もページ数が費やされた章であり，その重要性が分かる．最近の Planck 衛星の成果を理解するために必要な知識が説明されていて，必読の章である．また，現在，最もホットな話題である偏光観測にも言及されている．第 7 章では，宇宙背景放射とは相補的な観測対象である宇宙大規模構造について解説されている．物質の密度揺らぎの進化は，宇宙論の基本中の基本であり，是非とも習得したい項目である．特に，バリオン音響振動は，次の章の暗黒エネルギーの議論でも重要となる．第 8 章は暗黒エネルギーの問題が簡潔にまとめられている．暗黒エネルギーは現代物理学に大きな問題を投げかけているのであるが，ここでは，その大問題に対する様々なアプローチが網羅されていて，そこに挙げてある参考文献と合わせて読めば，最先端の宇宙論の現状が分かるはずだ．最後の章は，さらに高度で，著者の研究を反映させた内容となっている．

本書の特徴を一言で言えば，第一線で活躍している宇宙論研究者によるかなり高度な現代宇宙論入門，となる．内容が高度なことは，学部の学生ではなく，大学院レベルの学生を対象にしているということからリーズナブルである．量的にも，大学院のゼミなどで使うのに程良い分量ではないかと思う．実のところ，宇宙論の専門家にとっても，かなり有用な教科書である．結論として，本書は宇宙論を再び身近にすることに貢献する一冊であると思う．

早田　次郎（神戸大学大学院理学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

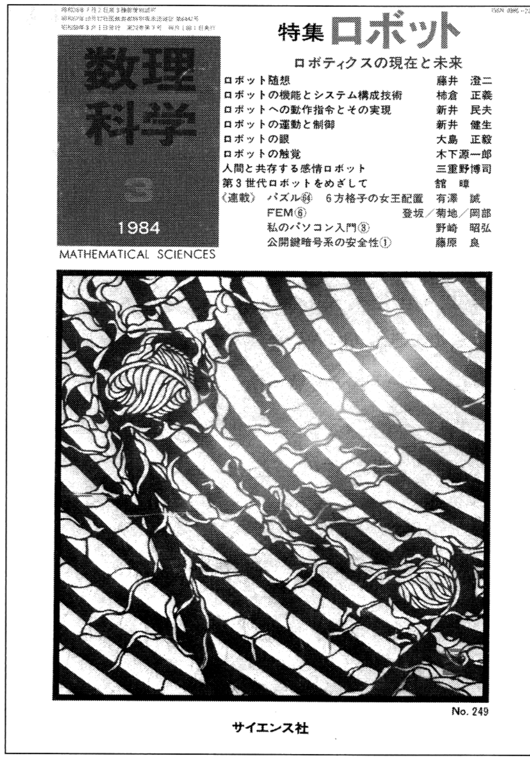
新井　民夫

1984年3月号

「ロボット言語とは奇妙な言葉である．ロボットがしゃべる言語ではなく，ロボットが理解できる言語である．……人間とロボット間で相互に会話できるもの」が必要であることを指摘して締めくくった30年前の我が文章を読み返すと，この時代に開発した技術がいまだに産業用ロボット分野で使用され続けていることに気づく．この間，ロボット技術は大きく進歩した．ヒューマノイドは荒地を走れるようになり，自動走行技術は自動車を知的ロボットに変えた．しかし，ロボットと人間との間のマンマシンインタフェースは期待したレベルには到達していない．30年前，ロボットの動作指定技術は，作業一つ一つを細かく記述する方法であった．それがいまだに支配的方法であり，そのころ，夢見た「冷蔵庫からビールを出して持ってきてくれ」とロボットに呼びかけるとその動作を実現するシステムは，試作開発なら多数あっても，普及には至っていない．

ところで，月に達するロケットと街中を自動走行する自動車とでは，どちらが複雑なソフトウェア準備を必要とするのであろうか．対応すべき状況の多様性では後者のほうが多いように思われる．ただ，共に複雑なシステムを専門家が時間をかけて開発しており，ユーザが入り込む余地は少ない．これに対して，「ビールを頼む」問題は個人ユーザとロボットとの間のマンマシンインタフェースとしての言語問題である．ビールが中で冷えている「冷蔵庫」を目標位置とする走行は自動車に似ている．冷蔵庫の「ドアを開け」て，「ビールを掴み」，「外に持ち出し」，「ドアを閉める」など一連のマニピュレーション指令は30年前に書いたロボット言語の解説にある「作業記述」として開発されてきた．今では，作業の構成要素である動作記述は汎用プログラム言語に代替されている．加えて，汎用性のある機能の再利用化が進んだ．

一方で，言語理解の技術や表情表現の研究も進み，いまや，普通の人どうしで交わされる表情や身振りつきのコミュニケーション手段が実現できている．つまり，人間がロボットに話しかける言語は，自然言語そのものとして実現していると言い切ってよい時代なのである．しかし，人間の表現は曖昧さを含みすぎる．ロボットの動作環境は複雑で，時間と共に変化する．それゆえ，まだ自然言語でロボットにすべての指示を出すには至っていないのである．実直なワーカである産業用ロボットに対しては，昔ながらに一つ一つ動作を指令する方法がいまだに使われているのである．



人間の表現の曖昧さがロボットにうまく指示できるようになるとき，動作指令は新しい展開を迎えるのではないだろうか．

（あらい・たみお，芝浦工業大学教育イノベーション推進センター）

科学と社会 Science & Society

第19回　国家・学問・戦争の諸相

第二次大戦下の物理学者(2)

日本の動向

岡本　拓司

前回は，第二次大戦下のアメリカの物理学者たちの動向を，戦時研究からやや離れた位置にあったブリッジマン（Percy Williams Bridgman, 1882–1961）による観察を通して検討した．今回は同時期の日本の物理学者の言動を取り上げたい．

19.1「科学的精神」の擁護

日本では，日中戦争の影響が社会の各方面に色濃く現れる以前から，科学に携わる人々が危機感を覚えるような事態が発生していた．昭和6年（1931年）には，文部省の学生思想問題調査委員会は，学生生徒の左傾化の原因の一部を外国思想の盲目的模倣や自然科学的見地への偏倚であると指摘しており，これを受けて翌年には国民精神文化研究所が設立された．昭和9年（1934年），文部大臣の松田源治（1875–1936）は，従来の教育の方針の西欧偏重・知育偏重を批判し，翌年には美濃部達吉（1873–1948）の天皇機関説が攻撃を受け，統治者としての天皇の地位を確認しようとする国体明徴運動が起こった．この運動は，直接科学に関わりはしなかったが，明治半ばに日本が苦難の末に選択した立憲君主制を否定しようとするものであり，西洋型の合理性を軽んずる傾向を代表し先導していた．さらに昭和10年（1935年）には，文部省が教学刷新評議会を設置し，新たな教育の方策を諮問した[1)]．

当時の政府・軍は，しかし，反科学的論調にのみ支配されていたわけではない．昭和11年（1936年）の教学刷新評議会の答申には，欧米文化の模倣から離れ日本精神を振興すべきことがうたわれていたが，一方では自然科学とその応用の奨励も勧められていた．また，昭和9年に陸軍の発行した「国防の本義と其強化の提唱」（通称「陸軍パンフレット」）は，陸軍による社会主義体制の採用や統制経済の実施を説いていたが，技術や科学研究についても統制の下で発展させる必要があると主張していた．日本精神を強調して科学を含む西洋文化を排除する動きとは別に，科学を統制の下において国防のために役立てようとする方向性も存在していたのである．

軍に関しては皇道派・統制派の通称で知られる二傾向があり，また政府には統制経済を推進しようとする革新官僚がいたことは知られている．軍に皇道派があったとすれば，政府にも反革新官僚型の人物はおり，例えば，天皇の統治権に対する危機には異様に敏感な平沼騏一郎（1867–1952）は，ソビエト連邦の共産主義もドイツの国家社会主義も国体に反するものとみなし，近衛文麿（1891–1945）の新体制運動や昭和15年（1940年）に誕生した

大政翼賛会を危険視した．もっとも，軍・政府ともに，一人の人物の中に両方の傾向が共存していることも，二つの動きが互いに便乗しあうこともあった．国粋主義は科学振興とは一見相容れないが調停できないわけではなく（「日本主義科学」などとして），統制とは常に対立しあうわけでもない．敗戦に至るまでの時期には，これらの傾向が，他の思想や言論の弾圧を伴いながら，協調と反発をくりかえしつつ出現していくこととなる．

哲学者の田辺元（1885–1962）は，『改造』の昭和11年10月号に掲載された「科学政策の矛盾」[2]において，知育偏重を批判しながら国防のために科学奨励を主張する政府の姿勢には不整合があると指摘し，実証性・合理性からなる科学的精神に基づいて科学知識の増進を図ることの重要性を説いた．上述の軍・政府の姿勢の矛盾に気づき，科学振興を貫徹させることを要請したのである．これを受けて，数学者・数学史家の小倉金之助（1885–1962）は，同年12月，『中央公論』において「自然科学者の任務」[3]を発表し，やはり知育偏重批判を反動的であるとして斥けた上で，より精緻な事実の発見に基づきより完全なる理論を得ようとするのが科学的精神であるとし，これが日本では科学者においてさえ欠けているのは日本の科学の封建的特質によるものであるから，自由な精神に基づく科学批判によって正常な姿を取り戻さなければならないと指摘した．小倉も，軍・政府に見られた反科学的思潮に危機感を覚え，科学擁護を主張したのである．

さらに，物理学者・科学評論家の石原純（1881–1947）は，昭和12年3月号の『科学ペン』に掲載された「社会事情と科学的精神」[4]において，科学の放棄を示唆するかのような姿勢を示す政府当局の誤謬を，田辺・小倉が指摘した点を高く評価した．一方で石原は，マルクス主義の社会理論が歴史の必然的過程を説き，社会の行く末が一種類の形態をとると記述したことにより，そこに至るための手段の可否をいとわない傾向さえ生みだした点には批判的であった．また，ロシアやドイツの例を挙げて，統制は結局は科学研究の衰微をもたらすと指摘し，国際的協力も科学振興には不可欠であると述べた．

田辺・小倉・石原は，国粋主義的な傾向をもつ科学批判という軍・政府の——一面での——姿勢に危機感を覚えて，国家の正しい方向を示すために科学擁護の論陣を張ろうとしたのであった．軍・政府への批判は，内容によらず当局による弾圧および多様な政治団体からの攻撃の対象となり得る情勢であったから，こうした態度を表明するには一種の決断が必要であったと思われるが，立ち上がることを期待された科学者からの反応は薄かったようである[5]．また，封建的要素の一掃を主張してマルクス主義に近い傾向を示す小倉と，ソビエト連邦における統制をも批判する石原の間には，科学振興の具体的な方途の描像についても，無視できない違いがあったことに注意すべきであろう．

19.2 統制か科学の自由か

科学を統制の下において振興させようという動きは，昭和12年（1937年）の日中戦争の勃発以降，国防のための科学と技術の動員として進展した．同年に資源局と企画庁が合併して成立した企画院は，昭和14年（1939年）に科学部を持つようになり，文部省は昭和13年（1938年）に科学振興調査会を設けた上で，翌年には，そこでの議論を反映させるため，300万円の予算をつけて科学研究費交付金を発足させた．昭和15年（1940年）以降，国家のこうした動員への意欲を示すかのように，「科学技術」という言葉も使われるようになった[6]．数年前に懸念された反科学の論調は急速に消え去ったようであった．

科学振興の具体的な方策については，しかし，議論の余地があった．石原は，国防のために科学を活用しようとするのであれば基礎研究や科学者の自由を重視すべきであると唱え続け，日米開戦（昭和16年（1941年））の後もその姿勢を崩さなかった．統制を進める当局への配慮からか，出版社は次第に彼への執筆依頼を控えるようになったという[7]．一方，昭和16年に入ると，大阪帝国大学の

化学者の小竹無二雄（1894–1976）や同じく物理学者の菊池正士（1902–1974）は，科学者も，従来追い続けてきた研究からいったんは離れ，国家の要請に応ずるべきであると主張した．理化学研究所（理研）の仁科芳雄（1890–1951）も，純粋科学の継続は必要であるが，現時点では科学と技術が国家の要請のために統制の下に入ることが重要であると説いた[8)].

反科学的論調に抗して科学的精神を擁護した点で石原に高く評価された小倉は，『中央公論』の昭和 16 年 4 月号に掲載された「現時局下に於ける科学者の責務」[9)]において，小竹や菊池の国家のために働きたいとする議論を引用しつつ，「原則として，科学及び技術の研究を，国家目的のために，強力に統制せよ」と主張した．この当時，研究の自由を，マルクス主義と並んで否定されるべき思想であった自由主義に基づいて主張することはできなかったが，小倉は，「衷心から科学を愛好する立派な研究家」がそれでも自由に固執するとすれば，「科学の国家的・社会的意義」や現下の「国際的危機」に対する認識不足のために科学統制の意義を誤解している可能性があると指摘する．さらに小倉は，「革新的な研究統制」には，無能な研究者が「縄張り」の中に安住するという「封建的なギルド性」を打破する意義があると認めていた．

統制への協調は，濃淡はあれ科学者に広く見られた態度であったが，小倉の議論に見る通り，マルクス主義に近い姿勢を持つ者にとってもとりやすい姿勢であった．軍と政府の進める科学振興と統制には同意できるのであるから，マルクス主義を表面化させない限り，具体的には自分たちの指針と国家の進む方向との間に齟齬はない．小倉の自己認識としては，軍や政府から危険視される覚えはなく，また，先取りして言えば，彼が戦時下に書いた科学振興の主張は，若干の字句の修正を施せば，戦後にもそのまま使うことができた[10)]．科学振興は戦争を生き延びて戦後も主張され，加えて敗戦後はマルクス主義が復権したためである．国家の中にあって動員を進めていた人々も同様の認識をもっており，敗戦後の占領改革の初期には，戦時中に民有国営などの形で統制の下におかれた諸産業は，資本主義的な弊害からまぬかれているとも主張された[11)].

統制に基づく科学振興が主要な論調となる中で，科学の自由を主張し続けた石原は，圧倒的な少数派とならざるを得なかった．この点は，英米の M・ポラニー（Michael Polanyi, 1891–1976）やブリッジマンの例によく似ている．ただし，ブリッジマンの場合は，個人の自由を主張して国家の統制に対抗する姿勢を貫くことができ，また，国家や社会が科学のために奉仕すべきであって逆ではないと主張して，科学が犠牲になるのであれば国家への協力は拒むとの構えさえ見せた．石原は，戦争にも国家による科学の動員にも反対していたわけではなく――反対できる状況にはなかった――，国防などの国家の目的のために科学を振興し活用したいというのであれば，自由を保障し基礎研究を重視することが必要であると主張したのであった．

戦前から戦後にかけて科学振興の論調が継続したことは指摘されるが，引き継がれたのはそればかりでなく，社会主義的な統制も戦後なお有力であった．また，当時の人々の発言の評価は，苛烈な統制や弾圧の存在を考慮に入れた上で行わなければならないが，それでも個々の議論を検討すれば，論者ごとの個性はある程度は確認できる．

19.3 純粋科学における戦い

科学における自由を擁護しようとした石原も，それが究極的には応用面での成果に結びつくことを理由として挙げていた．しかし，現実に戦時研究の只中にありながら，応用面とは関わりのない動機に基づいて科学に携わっていた人々も，戦時の日本には存在した．

物理学者の武谷三男（1911–2000）の回想によれば，昭和 16 年 12 月の真珠湾攻撃の後，年内に理研で研究会が行われたが，懇親会（武谷の言葉では「およばれ」）では，仁科が，戦争が始まって大変だが，終わってふたをあけたときに，日米の学問を比較して，日本が劣っていたというみっと

もない状態にならないよう，日本国の威信のために，我々は純粋研究をしなければならないと言ったという．所長の大河内正敏（1878–1952）は，造兵の専門家らしく，日本海軍が「レパルス」や「プリンス・オブ・ウェールズ」を沈めたマレー沖海戦で使われた魚雷は，日本の科学者の研究の成果であることを力説した．一方，菊池は，日本が負ければ取り返しがつかず，純粋の学問などといっている場合ではないと「大演説」をぶった[12)]．

菊池は非常時には科学者も自身の研究を離れて国家の需めに応ずるべきであるという従来の主張を繰り返し，大河内は科学者は専門の研究に従事していれば国家にも貢献できると指摘したわけである．これに対して仁科は，国家の威信のために，国際交流の途絶える戦時にむしろ純粋科学を進めておくべきであると主張したのであった．国家間の戦争に直接寄与しない純粋科学という場が研究者の戦場であるという発想であり，学生時代の長岡半太郎（1865–1950）が物理学を選んだ動機にも同様の発想が見られ，また第一次大戦後のドイツの科学者たちの行動を支えていたのも同種の意識であった．武谷の記憶では，理研では多くの研究者が仁科と同様の話をし[13)]，実際当時の日本の科学者には，「狂信的にファッショ的な人」はあまりおらず，「戦争でうまいことをしてやれとか，戦争をダシにして研究費をもらおうといった，非常に実利的な戦争利用者」のほうが多かったという[14)]．

仁科は，『科学』の昭和17年3月号の巻頭言[15)]においても純粋科学の必要を説いているが，ここではさすがに第一の理由として基礎研究が技術の進歩をもたらすことを挙げ，第二の理由として東亜共栄圏内に純粋科学を担当する国がないことに言及している．さらに挙げられている三番目の理由は，「戦争が済んで蓋を開けた暁に我国の科学が著しく見劣りのする様なことがあつては，我国の威信にも関することであり，大東亜の新秩序建設にも色々の意味に於て支障を来すであらう」というものであり，ここからは理研での発言の意図を推し量ることができる．この時点では日本軍は各方面で快進撃を続けており，仁科も日本が敗れることは想定していなかったであろう（想定していたとしてもあからさまにそれを書くことはできないが）．当時，自国の敗戦を経験した日本人はいなかったために，これを想像することは困難でもあったであろう．仁科もおそらく，日本が戦争に勝利することを想定していたと思われるが，では勝利したとして，その際，純粋科学の面で他国に圧倒されているようでは，「皇軍の大戦果に対して洵に申訳のない話である」ということになる．

約40年前の日露戦争後，戦争に勝利しても文化への貢献において見劣りがするために，他国からの「尊敬と同情」が得られないことをかこったのは，医学者の青山胤通（1859–1917）であった．この意識が日本の医学者たちに癌研究会の設立（明治41年（1908年））とこれを介した国際的な癌研究への参画を行わせることとなる．その後，日本は第一次大戦でも戦勝国となり，世界三大海軍国，五大強国のうちに数えられるようにもなったが，科学界における地位は必ずしも高いものではなかった．昭和5年（1930年）にインドの物理学者ラマン（Chandrasekhara Venkata Raman, 1888–1970）がアジア人初の自然科学部門でのノーベル賞受賞者となったこと，これに対して少なくとも国内では評価の高かった北里柴三郎（1853–1931）や山極勝三郎（1863–1930）がノーベル賞を受賞できずに死去したこと，また昭和10年には加藤元一（1890–1979）がノーベル賞候補となったと伝わったことなども，日本の科学への国際的評価を気にかける人々の間では話題になった．戦争は不敗であっても，文化では高い評価を得ていないという不満は蓄積し続けており，国家が一大決戦に臨む間も研究の中断など考えられないというのが実情であったであろう．

仁科の発言は，昭和16年末から翌年初めにかけての日本軍がまだ優勢であった時期のものであるが，彼と同様の態度は，ミッドウェー海戦（昭和17年（1942年））やアッツ島玉砕（昭和18年（1943年））を経て日本の敗色も濃くなりつつあった昭和18年（満洲国の年号では康徳10年）10月に，理研から遠く離れた満洲の新京で刊行された

『満洲物理学会誌』の「創刊之辞」[16]の中にも窺うことができる[17]．

「創刊之辞」を記したのは同誌の発行人で中央観象台長の長谷川謙であったが，彼は，欧米との科学文献の交流のない中，自分は大東亜戦争の一部をなす「烈しい科学戦」を行っており，研究に専念して独創的な発表をすることを期したいと述べている．日本に科学方面での成果が乏しかったことは事実であるが，何もないわけではないとして，日本刀や日本紙，さらに「世界に類を見ない磁石の発明」（本多光太郎（1870–1954）らの成果を指すのであろう）を例として挙げている点からは，実用面での貢献を考えているようにも思われるが，長谷川は「物理学における中間子論」も誇るべき到達点に含めている．「筆者は此の戦争中には世界に冠たる航空機，潜水艇が出来るものと信じて居ります」と書き，「又物理学に於ては素粒子論の大成を信じて疑はないものであります」と続けているところからは，応用上の成果と，いわゆる純粋科学における偉業を並べようとする意図も感じられ，後者での日本の業績の代表は，中間子論・素粒子論であると看做されていることが分かる．文章全体は，長谷川にとっては「研究即ち戦争」であって，そこで所期の成果を挙げることが彼の任務であるという決意で締めくくられる．

一方で，中間子論・素粒子論から遠くない研究領域にいた三村剛昂（1898–1965）は，戦後，広島で被爆したあとで病床にあった時期に，どのようにしてこのかたきを討つか考え，ドイツのように武力で挑んでも見込みはなく，芸術，文学，あるいは理論物理学において世界一になることで勝とうと思い至ったという[18]．つまり，三村の場合には，理論物理学を戦いの場であると意識したのは戦後数カ月たってからのことであった．しかし，この三村は，戦争の帰趨も明瞭になりつつあった昭和19年（1944年），広島文理科大学に附属研究所として理論物理学研究所が設けられる際に主導的な役割を果たし，初代所長を務めている[19]．三村の研究は一般相対論と量子力学の統一に関わるもので，意識していたかどうか，あるいは公言していたかどうかは別として，戦時下でも純粋科学の研究を継続するという姿勢を，身をもって貫いていたことになる．

19.4 中間子論とサイクロトロン

仁科の場合には，純粋科学の領域に，日本の物理学の大躍進の機会を見出しており，それは長谷川も言及している中間子論に関わるものであった．湯川秀樹（1907–1981）が昭和9年に中間子論を発表した直後から，仁科はこれに期待を寄せていたが，昭和12年になってアメリカの物理学者が宇宙線中に中間子を発見したことを報告すると，自身の研究室でこの粒子の詳細についての検討を進めるようになった．さらに，湯川の開いた道が日本の科学史上も希な快挙となる可能性を見て取ったのか，昭和12年8月には理論研究者と宇宙線観測の専門家を集めた会合の開催を提案した．昭和14年末，当時はまだ健筆をふるっていた石原も，1年間の出来事を振り返る記事で，湯川がソルヴェー会議に招かれたことを「異常な名誉」と評し，大戦勃発で会議が中止となったことを惜しみながらも，この若い理論物理学者には今後もまだ様々な機会があるであろうと記している[20]．

理論・実験の両面で世界各地で研究が蓄積されるようになると，しかし，宇宙線中に発見された新粒子の寿命は，理論的に計算された湯川粒子の寿命の100倍であり，宇宙線粒子の原子核による散乱の観測値も湯川粒子について想定されるものよりはるかに小さいことなどが明らかになってきた[21]．仁科が昭和16年6月に『朝日新聞』に寄稿した宇宙線の解説にも，宇宙線中の粒子と湯川粒子の違いについての言及があり，矛盾の解決が課題であることが記されている[22]．1940年に始まった湯川のノーベル賞への推薦も，1943年から1945年の間は（戦時中，ノーベル賞の授賞は中断したが推薦は集められ続けた），モーリス（Louis-Cesar-Victor-Maurice de Broglie, 1875–1960）とルイ（Louis Victor de Broglie, 1892–1987）のド・ブロイ兄弟によるものがあるのみであった．フラン

スは当時，親ナチスのヴィシー政権が統治しており，ド・ブロイ兄弟からの推薦状には，戦時下で充分な情報を得ていないとの断り書きがあった[23]．

昭和12年に仁科が提案し，昭和16年6月には「理論の会」という研究会に発展した会合は，戦時下でも，「迷想会」（昭和17年4月），「メソン会」（同年12月），「中間子懇談会」（昭和18年6月），中間子討論会（同年9月）などの名称で継続して開催されたが，日本の理論物理学者による中間子論の改訂の試みは，ここを発表の場として行われた．また，昭和19年11月には学術研究会議素粒子（論）班発表会も開催されている．理論改訂の指針としては，昭和17年に，湯川の中間子が崩壊して宇宙線中の中間子になるという説（二中間子論）が発表され，坂田昌一（1911–1970）が宇宙線中間子がフェルミ粒子である場合を，谷川安孝（1916–1987）がボース粒子の場合について計算を進め，前者の結果は坂田と井上健（1921–2004）が日本数学物理学会で発表した（英文での発表は昭和21年（1946年））．谷川の結果は昭和22年（1947年）に発表された[24]．

中間子論と並んで，場の量子論の各所に無限大が現れることが，当時の理論物理学者たちが抱えていた課題であったが，湯川は後者とともに前者を解決しようとし，一定の微小領域（やがて湯川のマルと呼ばれるようになる）で無限大の困難の現れない理論を構想した．戦後になって無限大の問題をくりこみによって回避する方法を提案することになる朝永振一郎（1906–1979）は，中間子論に関しては理論の枠組みには手をつけず，場の反作用を考慮した近似法の改良を企てて中間結合の理論を提案した．

仁科にとっては，宇宙線の研究と並んで，電磁石の直径が60インチの大サイクロトロンを完成させることが，中間子論への貢献の途であった．日米開戦前の昭和15年にローレンス（Ernest Orland Lawrence, 1901–1958）の研究所で指導された改造の指針に従って，共振原理の導入と真空の改善を中心とした作業が続けられたが，同時に，ローレンスが建造に着手しつつあった，中間子の発生を望み得るさらに巨大なサイクロトロンの詳細も次第に明らかになっていった．昭和15年のうちは2,000トン，4,000トンと言われた重量は，昭和16年に入ると4,500トン，4,900トンとより詳細に報じられるようになり，直径184インチという数字も現れるようになった．この機器については，発生する中性子の影響を抑えるため，電磁石のためのコンクリート台が山上に設置されているなどの事情も知られるようになり，山中の巨大サイクロトロンの想像図は，以後も一般科学雑誌などに現れ続けた[25]．

仁科は巨大サイクロトロンによって宇宙線が人工的に作り得ることを意識していたが，「駆逐艦二隻に要する鉄並に銅」を必要とする大計画は日本では困難であり，これをなし得るアメリカの科学の「前途は実に洋々」たるものであると論じていた[26]．日米開戦後は，海戦の報道に接した際のことであろうか，「駆逐艦一パイだがなあ」と，海中に消えていく鉄や銅を惜しむかのように漏らす声を，周辺の研究員は耳にするようになった[27]．

アメリカではサイクロトロンの軍事利用が行われている可能性があることも，すでに昭和15年には語られるようになっていた．ローレンスの研究所から帰った矢崎為一（1902–1970）は，アメリカではこの機器を「ナショナル・ディフェンス」に使おうという意図があるようだと語り，詳細は明らかにしなかったものの，ウラン235に遅い中性子をあてた際に発生するエネルギーを用いたものであるとの推測を漏らした[28]．

19.5 原子爆弾の開発

ウランの核分裂を軍事利用する構想（「ウラニウム爆弾」）についても，仁科はアメリカに後れをとることはなかった．昭和15年の半ばを過ぎたころ，仁科と矢崎は，陸軍の航空技術研究所の所長であった安田武雄（1889–1964）に，ウラニウム爆弾の実現可能性について知らせており，これを受けて翌年4月には，安田は理研に原子爆弾製造の研究を依頼した．それまでには仁科は爆弾の開

発に関して楽観的な見通しを持たなくなっていたが，航空技術研究所の委託研究により得る収入は，財政面で大きな比重を占めていた[29]．

一方，海軍も，昭和15年には原子力の軍事利用の可能性について情報を得ており，昭和17年には，伊藤庸二（1901–1955）を中心に，物理学研究の他分野の成果も含んで検討するために「物理懇談会」が設けられ，仁科や菊池が加わった．物理懇談会ではウラン235の濃縮の方法なども検討されたが，昭和18年3月に最後の会議を終えた．昭和19年1月には，海軍科学技術審議会の第一小委員会において，長岡が原子崩壊のエネルギーの軍事利用については実現可能性がないとの見解を示したが[30]，同年，海軍技術研究所は京都帝国大学の荒勝文策（1890–1973）に原子力利用に関する研究を委託した（「「F」研究」と呼ばれる）．これには湯川や坂田も加わったが，昭和19年10月，昭和20年（1945年）7月に会議を行った程度で敗戦を迎えた[31]．

仁科がウラニウム爆弾について陸軍に働きかけたのも，当初は大サイクロトロン改造用の資金・資材を引き出すことが目的であったようである．しかし，ミッドウェー海戦での敗北などにより，公に報道されることはないものの戦局の悪化と戦争の長期化が推察されるようになった昭和17年末には，従来の純粋科学擁護は影をひそめ，現代の知識から言えば，原子炉の暴走に相当するような現象を用いた「爆弾」の実現化に力を注ぐようになった．昭和18年には理研の爆弾開発は航空本部直轄となり，仁科の名前に基づき「ニ号研究」と呼ばれるようになった[32]．ウラン235の濃縮が最初の課題であったが，扱った経験の蓄積もない物質を相手とする苦闘が続き，仁科は，南方で兵士が苦しんでいるさなかに先の見えない研究に甘んじてよいのかという疑念に苦しむこととなった．軍もまた開発の見通しが立たないことを感じ取っていたが，次の戦争に間に合えばよいという程度の対応だったようである．最終的には，昭和20年4月にウラン濃縮用の設備である熱拡散分離塔が空襲で焼け，5月をもって理研における計画は中止された[33]．

19.6 原子核研究への期待

日本の原子核物理学研究の躍進は，1930年代末には新聞等にも取り上げられて広く知られていたため，日米開戦後は，この分野で新たな兵器が開発される可能性があることは，少なからぬ国民も感知していたと思われる．

湯川は，昭和13年に服部報公会賞を受賞し，昭和15年には帝国学士院賞恩賜賞，昭和18年には文化勲章を得て，ラジオ出演もする時の人であった．受賞・受章は中間子論によるもので，博士号取得も教授就任も同じ理由に基づくことを考えると，効率のよい業績である（戦後にノーベル賞が加わる）．中間子は「湯川粒子」，「ユコン」などと呼ばれることもあり，日本人の名前を冠した初の粒子として騒がれた．その透過力の強さから，粒子はときに「怪物」とも呼ばれた．宇宙線を研究しサイクロトロンを建造した仁科もまた，「原子破壊」を行う「魔の実験室」の主宰者と称されることがあった[34]．

昭和19年に入ると，田中舘愛橘（1856–1952）が，貴族院で，20メートルの鉄を透過する宇宙線が存在することや，1グラムのラジウムが英国艦隊を全滅させ得ることなどを紹介し，それらを兵器として研究している者がいると口走るようになった．中学生程度を読者に想定した『学生の科学』にも「軍艦一隻を一マイルも上空へ吹き飛ばす物凄い力」を持つ「ウラニウム爆弾」が紹介され，ドイツが開発していると記された[35]．紛らわしいことに，この記事の著者は湯川日出男といった．

昭和20年1月8日の『朝日新聞』では，「科学者　新春の夢」という記事が，湯川の見た夢と称して，日本の山の中腹にある洞穴から透過力の高い放射線が飛び出し，ワシントンで大爆発を起こすという空想を紹介した．透過力の強い粒子といえば中間子であり，これを人工的に得るには現在のサイクロトロン（記事中では「サイクロトン」）の何十倍，何百倍の機器が必要であるが，洞穴には

巨大な鉄の塊が隠されているようで，これがそのサイクロトロンではないかと湯川が想像するところで夢は終わる．田中舘同様，この記事の執筆者は，透過力が高いのは物質との相互作用が小さいためで，兵器として使うには適さないことを理解していなかったようであるが，日米開戦前からたびたび報道されていたローレンスの巨大サイクロトロンや，その用途については充分な知識はあったものと思われる．

戦局が不利になった段階での神頼みに近い感情であったとも思われるが，日本の物理学者たちが戦前に得ていた原子核物理学における評価は，「科学戦」においても彼らが活躍してくれるのではないかとの期待を生み出していた．

前回，今回は戦時中の日米の物理学者の言動の一部を瞥見した．戦争は，事実上，科学の力の圧倒的な印象とともに終結を迎えることとなる．次回はその経緯を，日本で降伏が決断される過程に沿って検討することとしたい．

参考文献

1) 廣重徹，『科学の社会史（上）』（岩波現代文庫，2002 年），172–180 ページ．
2) 田辺元，『哲学と科学との間』（岩波書店，1942 年），97–130 ページ．
3) 小倉金之助，『科学的精神と数学教育』（岩波書店，1937 年），305–328 ページ．
4) 石原純，『科学と社会文化』（岩波書店，1937 年），21–40 ページ．
5) 廣重，前掲[1]，『科学の社会史（上）』，181 ページ．
6) 鈴木淳，『科学技術政策』，山川出版，2010 年．
7) 西尾成子，『科学ジャーナリズムの先駆者　評伝 石原純』（岩波書店，2011 年），275 ページ．
8) 廣重，前掲[1]，『科学の社会史（上）』，224–225 ページ．
9) 小倉金之助，『戦時下の数学』（創元社，1944 年），223–248 ページ．
10) 阿部博行，『小倉金之助——生涯とその時代』（法政大学出版局，1992 年），250–251 ページ．
11) 岡本拓司，「電気事業の再編成」，中山茂・後藤邦夫・吉岡斉編『通史　日本の科学技術　第 1 巻』（学陽書房，1995 年），212–229 ページ．
12) 武谷三男，『原子力と科学者　武谷三男著作集 2』（勁草書房，1968 年），345 ページ．
13) 湯川秀樹・坂田昌一・武谷三男，『真理の場に立ちて』（毎日新聞社，1951 年），193 ページ．
14) 武谷，前掲[12]，『原子力と科学者』，343 ページ．
15) 仁科芳雄，「大東亜の再建と純粋科学」，『科学』，**12** 巻 **3** 号，1942 年，1 ページ．
16) 長谷川謙，「創刊之辞」，『満洲物理学会誌』，**1** 巻 **1** 号，1943 年．
17) 勝木渥，『曽禰武　忘れられた実験物理学者』（績文堂，2007 年），226–227 ページ．
18) 「原子力問題に関する討論——学術会議第 13 回総会における——」，『自然』，**8** 巻 **1** 号，1953 年，28–38 ページ．
19) 藤川和男，「広島大学理論物理学研究所の 46 年」，『日本物理学会誌』，**45** 巻 **11** 号，1990 年，833 ページ．
20) 『朝日新聞』，1939 年 12 月 7 日，東京版朝刊，5 ページ．
21) 小沼通二，「第 2 章　湯川の中間子論——未知の荒野へ」，佐藤文隆監修，『新編　素粒子の世界を拓く　湯川・朝永から南部・小林・益川へ』（京都大学学術出版会，2008 年），45–62 ページ．
22) 仁科芳雄，「驚異の宇宙線 (4)　軟成分と硬成分」，『朝日新聞』，1941 年 6 月 18 日，東京版朝刊，3 ページ．
23) 岡本拓司，「日本人とノーベル物理学賞：1901 年–1949 年」，『日本物理学会誌』，**55** 巻 **7** 号，2000 年，525–530 ページ．
24) 小沼，前掲[21]，「湯川の中間子論」，59–61 ページ．
25) 岡本拓司，「原子核・素粒子物理学と競争的科学観の帰趨」，金森修編著，『昭和前期の科学思想史』（勁草書房，2011 年），105–183 ページ．
26) 仁科芳雄，「アメリカの科学」，『理想』，14 年 6 冊（109 号），1940 年 6 月，655–666 ページ．
27) 朝永振一郎・玉木英彦編，『仁科芳雄　伝記と回想』（みすず書房，1952 年），188 ページ．
28) 鏑木外岐雄・矢崎為一・大嶽六郎，「座談会米国の学界と学風」，『科学画報』，**30** 巻 **2** 号，1941 年，49–60 ページ．
29) 山崎正勝，『日本の核開発：1939〜1955』（績文堂，2011 年），11 ページ．
30) 山崎，前掲[29]，『日本の核開発』，24–25 ページ．
31) 山崎，前掲[29]，『日本の核開発』，44–53 ページ．
32) 山崎，前掲[29]，『日本の核開発』，27–43 ページ．
33) 山崎，前掲[29]，『日本の核開発』，61–66 ページ．
34) 岡本，前掲[25]，「原子核・素粒子物理学」，159–160 ページ．
35) 湯川日出男，「化学工業常識読本　火薬」，『学生の科学』，**30** 巻 **4** 号，1944 年，41–44 ページ．

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

ベクトル解析

空間の微積分

海老原 円・太田 雅人

12.1 勾配，発散，回転

今回はベクトル解析に関する問題を取り上げる．まずは基本的な微分演算子について確認しよう．

問題 12.1 （大阪大学大学院基礎工学研究科システム創成専攻電子光科学領域，平成 20 年度） $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を位置ベクトル，$r = |\boldsymbol{r}|$ を位置ベクトルの大きさ，$\boldsymbol{A} = (0, 0, A)$ を定ベクトルとする．次の量を計算せよ．ただし，スカラー関数 $f(r)$ は r の関数とする．

(1) $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ (2) $\nabla \dfrac{1}{r}$ (3) $\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{r})$ (4) $\nabla \times [f(r)\boldsymbol{r}]$

解答例 (1) $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を変数とするベクトル関数 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ の**発散** $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ は

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

で定義される．よって，$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 3$ である．

(2) $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を変数とするスカラー関数 φ の**勾配** $\nabla\varphi$ は

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

で定義される．また，$r = |\boldsymbol{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ だから

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \times 2x = -\frac{x}{r^3}$$

となる．y と z に関する偏微分も同様だから，$\nabla \dfrac{1}{r} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ である．

(3) まず，ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の**外積** $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

で定義されるから，$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{r} = (-Ay, Ax, 0)$ である．

また，ベクトル関数 $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ の**回転** $\nabla \times \boldsymbol{v}$ は

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

で定義されるから，

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{r}) = \left(-\frac{\partial}{\partial z}(Ax), \frac{\partial}{\partial z}(-Ay), \frac{\partial}{\partial x}(Ax) - \frac{\partial}{\partial y}(-Ay)\right) = (0, 0, 2A).$$

(4) ベクトル関数の回転の定義から，$\nabla \times [f(r)\boldsymbol{r}]$ の第 1 成分は

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(r)z] - \frac{\partial}{\partial z}[f(r)y] = f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}z - f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}y = f'(r)\frac{y}{r}z - f'(r)\frac{z}{r}y = 0$$

となる．第 2 成分と第 3 成分も同様に計算すると，$\nabla \times [f(r)\boldsymbol{r}] = (0, 0, 0)$ となることが分かる．

解答終わり

スカラー関数 φ の勾配（gradient）$\nabla\varphi$ は $\mathrm{grad}\,\varphi$ とも書かれる．また，ベクトル関数 $\boldsymbol{v}$ の発散（divergence）$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$，回転（rotation）$\nabla \times \boldsymbol{v}$ は，それぞれ，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ と表すことも多い．次の問題では，これらの記号が両方とも使われている．

問題 12.2（東北大学大学院理学研究科地球物理学専攻，平成 20 年度） φ をスカラー関数，$\boldsymbol{A}$ をベクトル関数とする．以下の式を証明せよ．

(1) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{0}$　(2) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = 0$

(3) $(\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\nabla A^2 - \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$，ここで，$A^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$

解答例　(1) $\varphi = \varphi(x, y, z)$ とすると $\mathrm{grad}\,\varphi$ の回転 $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi$ の第 1 成分は

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} = 0$$

となる．同様に，$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi$ の第 2 成分と第 3 成分も 0 となり，$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{0}$ が成り立つ．

(2) $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ とすると

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \tag{12.1}$$

だから

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y} = 0.\end{aligned}$$

(3) まず，$\frac{1}{2}\nabla A^2$ の第 1 成分は

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) = A_1\frac{\partial A_1}{\partial x} + A_2\frac{\partial A_2}{\partial x} + A_3\frac{\partial A_3}{\partial x}$$

であり，$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$ の第 1 成分は

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)A_1 = A_1\frac{\partial A_1}{\partial x} + A_2\frac{\partial A_1}{\partial y} + A_3\frac{\partial A_1}{\partial z}$$

だから，$\frac{1}{2}\nabla A^2 - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$ の第 1 成分は

$$A_2\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) - A_3\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)$$

となる．一方，(12.1) より，これは $\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$ の第 1 成分に等しいので，$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$ と $\frac{1}{2}\nabla A^2 - \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$ の第 1 成分は等しいことが示された．第 2 成分と第 3 成分についても同様に計算することにより

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\nabla A^2 - \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

が成り立つことが分かる． **解答終わり**

次は，ベクトル関数の**ポテンシャル関数**に関する問題である．

問題 12.3 （北海道大学大学院情報科学研究科メディアネットワーク専攻，平成 21 年度） ベクトル関数 $\boldsymbol{v}$ がスカラー関数 ϕ の勾配として定義されるとき，ϕ を $\boldsymbol{v}$ のポテンシャル関数という．このような関数 $\boldsymbol{v}$ に関して，以下の問いに答えよ．

(1) $\nabla\times(\nabla\phi) = \boldsymbol{0}$ が成り立つことを示せ．ただし，∇ は $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ なる微分演算子である．

(2) $\boldsymbol{v} = (x + 4y + (a-b)z, (a+b)x + 3y^3, 2x + cy + z^2)$ であるとき，a, b, c を求めよ．また，そのときのポテンシャル関数 ϕ を定めよ．

解答例 (1) これは問題 12.2 の (1) と同じ問題である．

(2) 仮定から，ベクトル関数 $\boldsymbol{v}$ はあるスカラー関数 ϕ により $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ とかけるので，設問 (1) より，$\nabla\times\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である．ここで，$\nabla\times\boldsymbol{v} = (c, a-b-2, a+b-4)$ だから，$a = 3, b = 1, c = 0$ である．

次に，$\boldsymbol{v} = (x + 4y + 2z, 4x + 3y^3, 2x + z^2)$ に対して，$\nabla\phi = \boldsymbol{v}$ を満たすスカラー関数 ϕ を定めよう．まず，$\nabla\phi = \boldsymbol{v}$ の第 1 成分 $\frac{\partial\phi}{\partial x} = x + 4y + 2z$ を x について積分すると

$$\phi = \frac{x^2}{2} + 4xy + 2xz + f(y, z) \tag{12.2}$$

とかける．ここで，$f(y,z)$ は x には依存しない y と z だけの関数である．(12.2) を y で偏微分し，$\nabla\phi = \boldsymbol{v}$ の第 2 成分と比較すると

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 4x + \frac{\partial f}{\partial y}(y, z) = 4x + 3y^3$$

となる．これから，$\frac{\partial f}{\partial y}(y, z) = 3y^3$ となるが，これを y で積分すると

$$f(y, z) = \frac{3}{4}y^4 + g(z)$$

とかける．ここで，$g(z)$ は z のみに依存する関数である．さらに，(12.2) を z で偏微分し，$\nabla\phi = \boldsymbol{v}$ の第 3 成分と比較すると

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 2x + \frac{\partial f}{\partial z}(y,z) = 2x + g'(z) = 2x + z^2$$

となる．これから，$g'(z) = z^2$ だから，$g(z) = \dfrac{z^3}{3} + k$（$k$ は定数）とかける．

以上により，$\boldsymbol{v}$ のポテンシャル関数は

$$\phi = \frac{x^2}{2} + 4xy + 2xz + \frac{3}{4}y^4 + \frac{z^3}{3} + k \quad (k \text{ は任意定数})$$

で与えられる．　　　　**解答終わり**

12.2 線積分，面積分，積分定理

この節では，**線積分**や**面積分**，**グリーンの定理**や**ガウスの発散定理**など重要な積分定理に関する問題を取り上げる．まずは，線積分と平面上のグリーンの定理に関する問題を考える．

問題 12.4（東北大学大学院工学研究科応用物理学専攻，平成 23 年度）以下の設問に答えよ．必要なら，xy 平面上の単一閉曲線 C と，C によって囲まれた領域を D として，微分可能な任意の関数 $P(x,y), Q(x,y)$ に対して成り立つ，次の Green の定理を用いてもよい．

$$\int_C \{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\} = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy$$

(1)　a, b を定数として，C_1 を点 $\mathrm{A}(0,0)$ から点 $\mathrm{B}(a,b)$ に至る任意の曲線としたとき，次の積分 I は経路 C_1 に依存しないことを示せ．

$$I = \int_{C_1} \{5x(x+2y)\,dx + (5x^2 - y^4)\,dy\}$$

(2)　設問 (1) の積分 I の値を求めよ．

解答例の中では図を交えて解説はしていないが，解説中で登場する C_1, C_2, C_0 は右図のようなものをイメージしていただけるとよい．

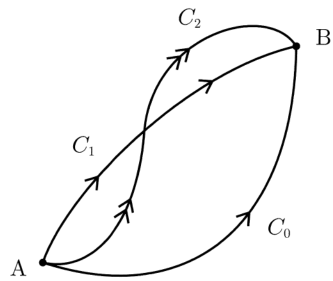


図 12.1

解答例その 1　(1) まず，$P(x,y) = 5x(x+2y)$, $Q(x,y) = 5x^2 - y^4$ とおくと，

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 10x$$

だから，グリーンの定理より，xy 平面上の任意の単一閉曲線 C に対して，

$$\int_C \{5x(x+2y)\,dx + (5x^2 - y^4)\,dy\} = 0 \qquad (12.3)$$

が成り立つことに注意する．

C_1, C_2 を点 A から点 B に至る任意の曲線とする．また，点 A から点 B に至る曲線で，C_1 と C_2 のどちらとも端点 A, B 以外では交わらない曲線 C_0 をとる．このとき，C_1 と C_0 の向きを逆にした曲線をつないでできる単一閉曲線に対して，(12.3) を適用すると

$$\int_{C_1}\{5x(x+2y)\,dx+(5x^2-y^4)\,dy\}=\int_{C_0}\{5x(x+2y)\,dx+(5x^2-y^4)\,dy\}$$

となる．同様に，C_2 と C_0 の向きを逆にした曲線をつないでできる単一閉曲線に対して，(12.3) を適用すると

$$\int_{C_2}\{5x(x+2y)\,dx+(5x^2-y^4)\,dy\}=\int_{C_0}\{5x(x+2y)\,dx+(5x^2-y^4)\,dy\}$$

となるから，積分 I は経路 C_1 に依存しないことが示された．

(2) 設問 (1) より，積分 I は経路に依存しないので，点 A$(0,0)$ と点 B(a,b) を結ぶ線分 γ に沿って積分する．γ は $(x(t),y(t))=(at,bt)$ $(0\leq t\leq 1)$ とパラメータ表示されるから

$$\begin{aligned}I&=\int_{\gamma}\{5x(x+2y)\,dx+(5x^2-y^4)\,dy\}\\&=\int_0^1\{5at(at+2bt)a+(5a^2t^2-b^4t^4)b\}\,dt=\frac{5}{3}a^3+5a^2b-\frac{1}{5}b^5\end{aligned}$$

となる．　**解答終わり**

上の解答例では，問題文のヒントに従って，グリーンの定理を用いたが，ポテンシャル関数を用いた別解答も与えておこう．

解答例その 2　問題 12.3 (2) の解答例と同様の計算により，2 次元のベクトル関数 $(5x(x+2y),5x^2-y^4)$ のポテンシャル関数として

$$\phi(x,y)=\frac{5}{3}x^3+5x^2y-\frac{1}{5}y^5$$

が求まる．すなわち，$\phi(x,y)$ は

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)=5x^2+10xy=5x(x+2y),\quad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)=5x^2-y^4 \tag{12.4}$$

を満たす．さて，C_1 を点 A$(0,0)$ から点 B(a,b) に至る任意の曲線とし，$(x(t),y(t))$ $(\alpha\leq t\leq\beta)$ をそのパラメータ表示とする．このとき，線積分の定義，(12.4) と合成関数の微分公式より

$$\begin{aligned}I&=\int_{C_1}\{5x(x+2y)\,dx+(5x^2-y^4)\,dy\}\\&=\int_\alpha^\beta\{5x(t)(x(t)+2y(t))x'(t)+(5x(t)^2-y(t)^4)y'(t)\}\,dt\\&=\int_\alpha^\beta\frac{d}{dt}\phi(x(t),y(t))\,dt=\phi(x(\beta),y(\beta))-\phi(x(\alpha),y(\alpha))\\&=\phi(a,b)-\phi(0,0)=\frac{5}{3}a^3+5a^2b-\frac{1}{5}b^5\end{aligned}$$

となり，積分 I の値は経路 C_1 に依存せず，$\dfrac{5}{3}a^3+5a^2b-\dfrac{1}{5}b^5$ である．**解答終わり**

次に，面積分に関する問題を取り上げる．

問題 12.5（東京工業大学大学院理工学研究科基礎物理学専攻・物性物理学専攻，平成 20 年度） 直交座標（デカルト座標）を用いて $z+x^2+y^2=a^2$ $(x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0)$ によって指定される面 S を考える．ここで a は実定数とする．以下の問に答えよ．

(1) 面 S 上の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求め，各軸方向の成分を x, y を用いて表せ．ただし，$\boldsymbol{n}$ の向きは原点に対して外向きにとるものとする．

(2) 面 S 上の微小面積要素を $dS=f(x,y)\,dxdy$ の形で表現した場合，関数 $f(x,y)$ を求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{V}=x\boldsymbol{e}_x+z\boldsymbol{e}_z$ の面 S に関する面積分

$$\int_S \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を計算せよ．ただし，$\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{e}_z$ はそれぞれ x, z 軸方向の基本ベクトルである．また，積分内の $\cdot$ はベクトルの内積を表す記号である．

解答例 (1) $a=0$ のとき，$z+x^2+y^2=a^2$ $(x\geq 0,\, y\geq 0,\, z\geq 0)$ によって指定される集合は原点のみからなるので，以下，$a\neq 0$ とする．このとき，S は

$$\boldsymbol{\varphi}(x,y)=(x,y,a^2-x^2-y^2),\quad (x,y)\in D$$

とパラメータ表示される．ここで，

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2,\, x\geq 0,\, y\geq 0\}$$

とおいた．このとき，S 上の点における 1 次独立な 2 つの接線ベクトル

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}(x,y)=(1,0,-2x),\quad \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y}(x,y)=(0,1,-2y)$$

に直交するベクトル

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y}\right)(x,y)=(2x,2y,1)$$

はその点における法線ベクトルとなる．また，このベクトルの向きは原点に対して外向きであり，その大きさは

$$\left|\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y}\right)(x,y)\right|=\sqrt{4x^2+4y^2+1}$$

だから，求める単位法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},\frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right)$$

となる．

(2) 面 S 上の微小面積要素 dS は $dS=\left|\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial y}\right)(x,y)\right|\,dxdy$ で与えられるの

で，上で計算したように

$$f(x,y) = \left| \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y} \right)(x,y) \right| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

となる．

(3) 設問 (2) の記号を用いると，求める面積分は

$$\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_D (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})(x,y) f(x,y)\, dxdy$$

で与えられる．ここで，$(x,y) \in D$ に対して

$$(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n})(x,y) f(x,y) = \boldsymbol{V} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial y} \right)(x,y) = 2x^2 + z = x^2 - y^2 + a^2$$

である．また，積分領域 D は x と y に関して対称だから，

$$\iint_D x^2\, dxdy = \iint_D y^2\, dxdy$$

となり，求める面積分の値は

$$\int_S \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_D (x^2 - y^2 + a^2)\, dxdy = \iint_D a^2\, dxdy = \frac{\pi}{4} a^4$$

となる． **解答終わり**

最後に，ガウスの発散定理と偏微分方程式への応用について考察しよう．

問題 12.6 （九州大学大学院工学府機械系専攻，平成 24 年度） 3 次元有界領域 Ω の境界 Γ や与えられた実関数 $f(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ は十分滑らかなものとし，十分滑らかな未知の実関数 $u(\boldsymbol{x})$ に対する次の偏微分方程式の境界値問題 (a), (b) を考える．

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, u(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}) \quad (\Omega \text{ 内で}) & \text{(a)} \\ \dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}} = g(\boldsymbol{x}) \quad (\Gamma \text{ 上で}) & \text{(b)} \end{cases}$$

ここに $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ は Ω 内の任意の点の位置ベクトルと直交座標成分, $\mathrm{grad}\, u(\boldsymbol{x})$ は $u(\boldsymbol{x})$ の勾配ベクトル，$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, u(\boldsymbol{x}))$ は $\mathrm{grad}\, u(\boldsymbol{x})$ の発散，$\dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}$ は u の Γ における法線微分（$\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトル）を表す．このとき，以下の問に答えよ．

(1) 式 (a) を x_i $(i = 1, 2, 3)$ を用いて書き直せ．

(2) 境界値問題 (a), (b) の解が存在するために $f(\boldsymbol{x})$ と $g(\boldsymbol{x})$ が満たすべき条件を求めよ．

(3) $f(\boldsymbol{x}) = 0$, $g(\boldsymbol{x}) = 0$ のとき，上の境界値問題 (a), (b) の解が存在すれば，それを求めよ．

解答例 (1) $u(\boldsymbol{x})$ の勾配ベクトル $\mathrm{grad}\, u(\boldsymbol{x})$ は

$$\mathrm{grad}\, u(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}, \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_3} \right)$$

で与えられるから，その発散は

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_3^2}$$

となる（これは $u(\boldsymbol{x})$ の**ラプラシアン**と呼ばれ，$\Delta u(\boldsymbol{x})$ または $\nabla^2 u(\boldsymbol{x})$ と書かれる）．よって，式 (a) は

$$-\left(\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_3^2}\right) = f(\boldsymbol{x})$$

と書き直される．

(2) ガウスの発散定理より

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}))\,dx = \int_\Gamma \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}\,dS$$

が成り立つ．ここで，左辺の積分は $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ に関する Ω 上の 3 重積分であり，左辺の積分は曲面 Γ 上の面積分である．また，$\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}$ は u の Γ における法線微分 $\dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}$ に他ならないから，境界値問題 (a), (b) の解 $u(\boldsymbol{x})$ が存在したと仮定すると

$$-\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}))\,dx = \int_\Gamma \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS = \int_\Gamma g(\boldsymbol{x})\,dS$$

が成り立つ．よって，境界値問題 (a), (b) の解が存在するためには，$f(\boldsymbol{x})$ と $g(\boldsymbol{x})$ は

$$\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\,dx + \int_\Gamma g(\boldsymbol{x})\,dS = 0$$

を満たす必要がある．

(3) $f(\boldsymbol{x}) = 0$, $g(\boldsymbol{x}) = 0$ のとき，任意の定数関数は境界値問題 (a), (b) の解となるが，以下では，これ以外に解は存在しないことを示そう．

まず，ベクトル関数 $u(\boldsymbol{x}) \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x})$ の発散を計算すると

$$\operatorname{div}\,(u(\boldsymbol{x}) \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x})) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{u(\boldsymbol{x})\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\left\{\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} + u(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i^2}\right\} = |\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x})|^2 + u(\boldsymbol{x})\Delta u(\boldsymbol{x})$$

となる．ここで，$u(\boldsymbol{x})$ を $f(\boldsymbol{x}) = 0$, $g(\boldsymbol{x}) = 0$ のときの境界値問題 (a), (b) の解とすると，ガウスの発散定理より

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x})|^2\,dx = \int_\Omega \operatorname{div}\,(u(\boldsymbol{x}) \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}))\,dx - \int_\Omega u(\boldsymbol{x})\Delta u(\boldsymbol{x})\,dx$$

$$= \int_\Gamma u(\boldsymbol{x}) \operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n}\,dS = \int_\Gamma u(\boldsymbol{x})\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{n}}\,dS = 0$$

となり，領域 Ω 内の任意の点 $\boldsymbol{x}$ に対して，$\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ となる．よって，$u(\boldsymbol{x})$ は定数関数である．

解答終わり

ベクトル解析は電磁気学や流体力学の問題の一部として出題されることも多いが，今回はそのような形式の問題は取り上げなかった．

次回は，ラプラス変換に関する問題を取り扱う．

（えびはら・まどか，埼玉大学大学院理工学研究科）
（おおた・まさひと，東京理科大学理学部）

例題形式で探求する 微積分学の基本定理
関数の性質から幾何構造を探る
第8回

曲面積 (2)

森田　茂之

8.1 曲面の局所座標と面積

前回，曲面の面積の定義を述べた．定義には曲面の接平面を持ち出す必要があり，直感的で分かり易かった曲線の長さの定義に比べて，やや難しいと感じた読者もいるかも知れない．しかし，これは 1 次元と 2 次元の幾何学の本質的な違いが現れたもので，必然的なものと言えるのである．今回は，この違いが別の 2 つの形で現れることを見る．一つは大域的なパラメータ表示ができるかどうかの問題であり，もう一つは向き付け可能性の問題である．

後者については，今回の最後の節で述べることにして，ここではまず前者について述べる．曲線は大域的なパラメータ表示ができる．曲線が閉じていて単純閉曲線になっている場合には，パラメータ付けを進めて行くとある時点で元の点に戻ってしまうが，そのまま続けてパラメータ直線を単純閉曲線に言わば“綺麗に巻き付ける” ことができる（普遍被覆と呼ばれる)．あるいは，言い方を少し変えて角度 θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ によってパラメータ付けができると言ってもよい．いずれにしても，曲線上の点は一つのパラメータで大局的に表示できると言ってもよいだろう．これに対して，曲面は一般には大域的なパラメータ表示ができないのである．ただ，曲面であるから，局所的には 2 つのパラメータで各点を表示することはできる．しかし，例えば球面を考えてみよう．もし大域的なパラメータ付けができるのであれば，比喩的に考えて地球上の全地点を “綺麗に覆う” 一枚の地図帳が存在するはずである．残念ながら，そのようなものはない．各地点は，経度および緯度という 2 つのパラメータによって表すことができる．経度は東経 180° と西経 180° が同じであるが，緯線上を一周する 360° で元に戻る構造は単純閉曲線の場合と同じであり，パラメータと

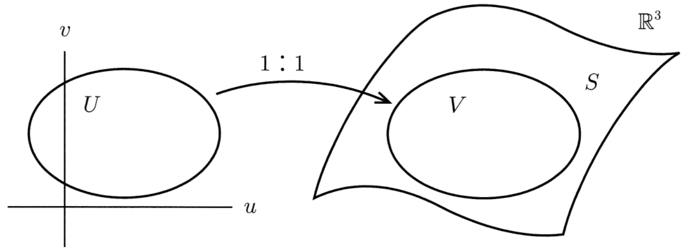


図 8.1　局所座標.

して許容範囲内といえる．しかし，北極と南極では経度が定義されず，このパラメータ付けの本質的な例外の点になってしまうのである．

そこで，一般の曲面については大域的なパラメータ表示は諦めて，局所的なパラメータ表示を何枚か用意して，曲面全体を覆うことを考えるのである．局所的なパラメータを**局所座標**（local coordinates）と呼ぶ．次元が上がっていくとさらに複雑な図形が現れ，必要な地図の枚数はさらに増えていくことが容易に予想される．この考えを進めて行くと，本連載で扱う内容を超えることになるが，**多様体**（manifold）の概念に到達する．

さて曲面の場合に戻ろう．本連載では曲面 S を次のように定義した．すなわち，S の任意の点 $\mathrm{P} \in S$ に対し，P の $\mathbb{R}^3$ におけるある開近傍 U と C^1 級の関数 $F : U \to \mathbb{R}$ が存在して

$$S \cap U = \{\mathrm{Q} \in U; F(\mathrm{Q}) = 0\}$$

となり，さらに任意の点 $\mathrm{Q} \in S \cap U$ に対し $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$ という条件が満たされている．このとき，例えば点 $\mathrm{P}(a, b, c)$ において $F_z(\mathrm{P}) \neq 0$ ならば，$(a, b) \in \mathbb{R}^2$ を含むある区域 $A \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f : A \to \mathbb{R}$ が存在して，S は P の近くでは f のグラフ

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in A\}$$

として表されることになる．このとき P の近くの曲面上の点は，2 つのパラメータ (x, y) によって表すことができることになる．この考えを少し一般化すれば，次のような定義が得られる．図 8.1 を見ていただきたい．uv 平面上の開集合 U から，xyz 空間すなわち $\mathbb{R}^3$ の中の曲面 S の開集合 V への 1 対 1 写像が

$$x = x(u, v),$$
$$y = y(u, v),$$
$$z = z(u, v)$$

の形で与えられているとする．そして条件

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2$$

が満たされているとする．このような場合，V に含まれる曲面上の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$

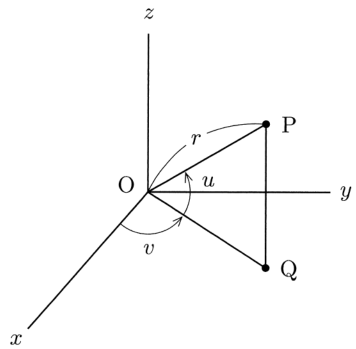


図 8.2　3 次元の極座標．

は 2 変数 (u, v) によって表されることになる．そこで (u, v) を V 上の局所座標と呼ぶ．

具体的な例として，地球上の点の経度・緯度による表示を取り上げる．そのために，まず 3 次元の場合の**極座標**（polar coordinates）を述べる．図 8.2 を見てほしい．$\mathbb{R}^3$ の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ に対して，原点から P への距離を r，P から xy 平面に降ろした垂線の足を Q とする．このとき，$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であり，また Q の座標は $\mathrm{Q}(x, y, 0)$ となる．次に，z 軸上にない点 P に対して線分 OQ から線分 OP に向けて計った角度を u とする．ただし $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ とする．さらに，x 軸の正の方向から線分 OQ に向けて xy 平面上で時計と反対回りに計った角度を v とする．この際 v は一意的には定まらないが，状況に応じて例えば $-\pi \leq v < \pi$ とすれば，値を一意的にすることはできる．このとき

$$
\begin{aligned}
x &= r \cos u \cos v, \\
y &= r \cos u \sin v, \\
z &= r \sin u
\end{aligned}
$$

となることが分かる．こうして，z 軸上の点を除いて $\mathbb{R}^3$ の点は 3 つの変数 (r, u, v) によって表すことができる．これを（3 次元の）極座標という．この極座標を，原点を中心とする半径 r の球面に制限すれば，球面の適当な区域の局所座標を作ることができる．具体的には，u は緯度，v は経度に対応する．これを**球面の極座標**という．

> **例題 8.1**　uv 平面上の開集合 U を $U = \{(u, v); -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, -\pi < v < \pi\}$ により定義し，対応する球面上の開集合を V とする．このとき，球面の極座標は V 上の点の局所座標の役割を果たすことを示せ．

解答　対応 $U \to V$ が 1 対 1 写像であることの検証は読者にまかせる．この対応のヤコビ行列を計算すると

$$
\operatorname{rank} \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin u \cos v & -r \sin u \sin v & r \cos u \\ -r \cos u \sin v & r \cos u \cos v & 0 \end{pmatrix}
$$

となる．この行列の階数がつねに 2 であることは簡単に確かめることができる．

8.2 局所座標と曲面積

局所座標で表される曲面の面積の公式を導こう．そのために図 8.3 のような状況を考える．曲面 S は uv 平面の区域 A を含む開集合で定義された局所座標により $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ とパラメータ表示されているものとする．また同時に，xy 平面上の区域 B で定義された関数 $z = z(x, y)$ のグラフの形でも与えられているものとする．このとき，前回示したグラフで表される曲面の面積の公式から

$$\operatorname{Area} S = \iint_B \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$

となる．ここで変数変換 $(u, v) \leftrightarrow (x, y)$ に対して変数変換の公式を使えば

$$\operatorname{Area} S = \iint_A \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, |x_u y_v - x_v y_u|\, dudv \tag{8.1}$$

が得られる．一方

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u,$$
$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

であるから，移項すれば

$$z_x x_u + z_y y_u - z_u = 0,$$
$$z_x x_v + z_y y_v - z_v = 0$$

となる．この式は，2 つのベクトル

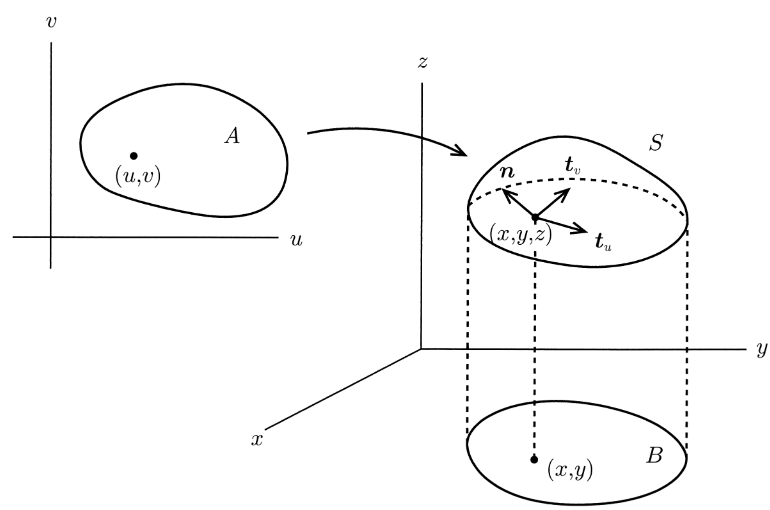


図 8.3　曲面 S.

$$\boldsymbol{t}_u = (x_u, y_u, z_u),$$
$$\boldsymbol{t}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

がどちらも $\boldsymbol{n} = (z_x, z_y, -1)$ と直交していることを示している．実際，図 8.3 に示すように $\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_v$ は曲面への接ベクトルであり，$\boldsymbol{n}$ は法線方向を向いている．

ここで，2 つの 3 次元ベクトルのベクトル積の幾何的な意味を思い出そう．明らかに $\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_v$ は一次独立である．この場合ベクトル積 $\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v$ は，それらが張る平面すなわち接平面と直交し，その長さはこの接平面上で $\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_v$ を 2 辺とする平行四辺形の面積と等しく，さらに $\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_v, \boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v$ が右手系をなすことで特徴付けられる．とくに

$$\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v$$

は $(z_x, z_y, -1)$ のある実数倍と等しくなることが分かる．すなわちある定数 c が存在して

$$\left(\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right) = c(z_x, z_y, -1)$$

と書ける．したがって

$$z_x^2(x_u y_v - x_v y_u)^2 = (y_u z_v - y_v z_u)^2$$
$$z_y^2(x_u y_v - x_v y_u)^2 = (z_u x_v - z_v x_u)^2$$

となる．これを上記の式 (8.1) に代入することにより次の公式が得られる．

公式 8.1（局所座標で表される曲面の面積 (1)）

$$\mathrm{Area}\, S = \iint_A \sqrt{(y_u z_v - y_v z_u)^2 + (z_u x_v - z_v x_u)^2 + (x_u y_v - x_v y_u)^2}\, dudv$$
$$= \iint_A |\boldsymbol{t}_u \times \boldsymbol{t}_v|\, dudv$$

ここで，局所座標によって表示された曲面に対して 3 つの関数 E, F, G を次のように定義する．

$$E = (\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_u) = |\boldsymbol{t}_u|^2, \quad F = (\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_v), \quad G = (\boldsymbol{t}_v, \boldsymbol{t}_v) = |\boldsymbol{t}_v|^2$$

例題 8.2　2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ に対し等式

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2 = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) & (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) & (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \end{vmatrix}$$

が成立することを示せ．

解答　外積の定義から

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|^2 &= \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}^2 \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\
&= (\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})^2
\end{aligned}
$$

となり，証明が終わる．

例題 8.2 を $\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_v$ に対して適用し，公式 8.1 に代入すれば，次の公式が得られる．

公式 8.2（局所座標で表される曲面の面積 (2)）

$$\mathrm{Area}\, S = \iint_A \sqrt{EG - F^2}\, du dv$$

例題 8.3　半径 r の球面上で，北緯 α° の緯線と南緯 β° の緯線の間にある帯状の区域の面積を求めよ．

解答　極座標の接ベクトルを計算すると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_u &= (-r\sin u\cos v, -r\sin u\sin v, r\cos u), \\
\boldsymbol{t}_v &= (-r\cos u\sin v, r\cos u\cos v, 0)
\end{aligned}
$$

となる．したがって

$$
\begin{aligned}
E &= (\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_u) = r^2, \\
F &= (\boldsymbol{t}_u, \boldsymbol{t}_v) = 0, \\
G &= (\boldsymbol{t}_v, \boldsymbol{t}_v) = r^2\cos^2 u
\end{aligned}
$$

となる．ここで公式 8.2 を適用すれば

$$\mathrm{Area}\, S = \iint_A r^2 \cos u\, du dv$$

を得る．ただし A は求める区域に対応する uv 平面上の区域である．したがって，求める面積は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Area}\, S &= r^2 \int_{-\beta^\circ}^{\alpha^\circ} \cos u\, du \int_{-\pi}^{\pi} dv \\
&= 2\pi r^2 (\sin\alpha^\circ + \sin\beta^\circ)
\end{aligned}
$$

で与えられる．

ここで，$\alpha = \beta = 90$ とすれば，球面の全面積 $4\pi r^2$ が得られることに注意する．

8.3 曲面の向き

1次元と2次元の図形の違いでもう一つ重要なものが，向き付け可能性の問題である．まず**向き**（orientation）とは何かということについて考えよう．

平面 $\mathbb{R}^2$ あるいは空間 $\mathbb{R}^3$ 内の曲線の向きの意味は直感的に明らかであろう．それは一つの矢印によって表すことができる（図 8.4 参照）．矢印を逆にすれば逆に向き付けられた曲線となる．曲線はいつも向き付けることができ，向きはちょうど2つある．

これを，まず2次元の曲面の場合に一般化したい．それには，まず曲線の場合について，上記よりも精密に次のように考えるのがよい．向きは，曲線上の各点において定義され，それはちょうど2つある．そして，それらはその点を始点とする曲線への長さ1の接ベクトル（2つある）の一方を指定することで表すことができる，このようにすることを，その点での向きを定めるという．そして，ある点において定めた向きは，点が曲線上を動くとき“同調する”向きとして伝播する．そして曲線全体の向きとは，各点において2つある向きのうちの一つを指定し，それらが曲線に沿ってすべて同調している場合を言う．

曲線の向きをこのように定義すれば，それを2次元である曲面の場合に一般化するのは容易である．すなわち次のようにすればよい．曲面上の各点において向きはちょうど2つ存在し，それらは図 8.5 のような矢印によって表される．そのどちらか一方を指定することを，その点での曲面の向きを定めるという．さて曲面上の一点Pで一つ向きを定めたとしよう．Pを始点とする曲線 C が与えられると，C に沿ってPにおける向きは伝播して C の各点における“同調する”向きを定め，最終的に C の終点Qにおける向きを定める．これらの準備のもとに，曲面 S の向きを次のように定義する．すなわち曲面上の各点Pにおいて向き o_{P} を定め，曲面上の任意の曲線 C に対して，その始点 $\mathrm{P}(C)$ における向きと終点 $\mathrm{Q}(C)$ における向きが C に沿って互いに同調しているとする．このとき $\{o_{\mathrm{P}}\}_{\mathrm{P}\in S}$ を S の向きという．また，このようにできる曲面を**向き付け可能**（orientable）な曲面という．そうでない曲面を**向き付け不可**

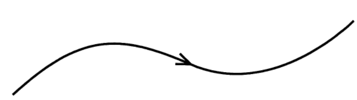


図 8.4　曲線の向き．

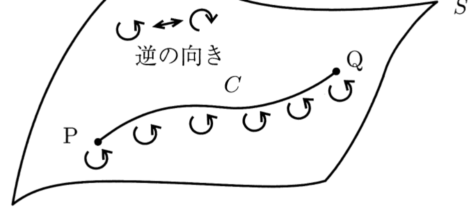


図 8.5　曲面上の道に沿って同調する向き．

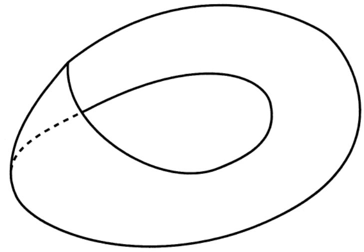


図 8.6 メービウスの帯.

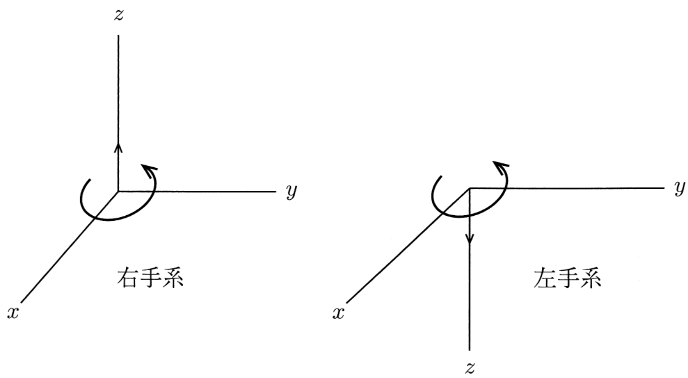


図 8.7 右手系と左手系.

能 (nonorientable) な曲面という．向き付け不可能な曲面の代表的な例として図 8.6 に示す**メービウスの帯** (Möbius Band) がある．別の言い方をすると，向き付け可能な曲面は表と裏の区別ができる曲面であり，向き付け不可能な曲面はそれができない曲面ということもできる．

次に 3 次元の向きについて述べる．この場合も各点において向きは 2 つあり，それらは右手系および左手系と呼ばれる．図 8.7 に示すように，右手系とは第一の座標軸の正の方向から第二の座標軸の正の方向に向かってねじを回したとき，通常の右ねじと呼ばれるねじが進む方向に第三の座標軸の正の方向が向かう向きであり，その逆方向を向いているものを左手系という．$\mathbb{R}^3$ の各点において右手系の向きを与えた空間を，右手系に向き付けられた空間という．逆に各点で左手系の向きを与えた空間を，左手系に向き付けられた空間という．3 次元の多様体あるいは一般に n 次元多様体の概念が導入されると，それらに対しても向きが定義されるが，ここではその事実のみを述べて終わることにする．

(もりた・しげゆき，東京大学・東京工業大学名誉教授)

特　集（2014年4月号予告）

物理現象における表現の多様さ

様々な視点がもたらす深い理解

巻頭言	和田　純夫
ニュートン力学と解析力学	加藤　光裕
ファラデーの力線とマクスウェル応力	岡部　洋一
量子力学の経路積分的見方	和田　純夫
多様な熱力学	佐々　真一
超伝導のマクロな見方とミクロな見方	加藤　雄介
一般相対性理論の幾何学的見方と非幾何学的見方	米谷　民明
強結合と弱結合	今村　洋介
ホログラフィック原理の意味とその発展	江口　徹

本体952円

特　集（2014年2月号）

利用する物理

基礎理論はいかに応用されるか

巻頭言	兵頭　俊夫
特殊相対論　スピントロニクス	齊藤　英治
一般相対性理論　GPS	藤本　眞克
光格子時計　新しい時間標準	香取　秀俊
量子もつれ　量子暗号への道	都倉　康弘
ボース・アインシュタイン凝縮	鳥井　寿夫
物性におけるトポロジーとその応用	永長　直人
ソフトマター物理学とその応用	鈴木　康夫
［コラム］科学的発見から技術的応用までの過程　核分裂発見から原爆開発までを事例として	橋本　毅彦
［コラム］導電性高分子の発見と開発	鈴木　康夫
《数学的な感覚の探求》第14回	三村　昌泰
《連載》科学と社会　その18	岡本　拓司
情報幾何の新展開　その28	甘利　俊一

本体952円

編集後記

昨年の4月号に続き，「○○における様々な発想」で特集を組ませていただきました．いかがでしたでしょうか．

小島先生が巻頭で「…発想の転換が常に期待される科学の現場では当り前といえば当り前だが，歴史の中に留めておくべき「発想」は時代とともに進化していることが見て取れる．」と述べられていますが，実際に各記事を見てみると発想の変化の変遷を読み解くことができます．

ところで，発想の転換は科学に限らず，私たちの生活でも問題解決のために常に期待されていることかと思います．

様々な問題解決のためのアイデアを常に模索していきたいところです．　(R)

＊　　＊

先日，ロマネスコというブロッコリーに似た野菜を食べました．食感が良く，なかなか美味しかったのですが，形状が印象的で，独特の食感はロマネスコのフラクタル形状が生み出しているようでした．何の理由があってフラクタル形状を選んだのかはわかりませんが，植物においても幾何学的発想が隠されているのかと思うと，数学と自然の関係が，神秘的で興味深く感じられました．

身近なところに隠されているいろいろな幾何学的発想を探してみるのも楽しそうです．今後も様々なところに目を向けてみたいと思いました．　(T)

数　理　科　学　3月号

2014年3月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　© 株式会社　**サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替00170–7–2387　(03) 5474–8600（広告部）

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁